Aufgabe 34. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & & & + & 4\,z & = & 1 \\ 2\,x & + & 2\,y & + & 2\,z & = & 2 \\ x & + & 3\,y & + & 2\,z & = & 3 \end{array}$$

über dem Körper $\mathbb{Z}_7$.

Aufgabe 35. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} i\,x & + & y & + & z & = & 1+i \\ (1+2i)\,x & + & 3\,y & + & (1+i)\,z & = & 4+i \\ -x & + & (-1+i)\,y & - & z & = & -1+i \end{array}$$

über dem Körper der komplexen Zahlen.

Aufgabe 36. Zeige, daß

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

ein Teilkörper von $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 37. Skizziere die folgenden Mengen in der komplexen Ebene:
(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} + z\bar{z} < 1\}$.
(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z^2) \leq 2\}$.

Aufgabe 38. Welche der folgenden Mengen sind Vektorräume (mit den üblichen Operationen)?
(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 1\}$
(b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \neq 0\}$
(c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_3 = 0\}$
(d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \leq x_3\}$
(e) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3\}$
(f) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \neq x_3\}$
(g) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\}$
(h) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i = 0 \text{ für mindestens ein } i \in \{1, 2, 3\}\}$

Aufgabe 39. Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit den Operationen

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', 0)$$
$$\lambda \odot (x, y) = (\lambda x, 0)$$

Welche Vektorraumaxiome sind erfüllt?