Aufgabe 40. Welche der folgenden Mengen sind Vektorräume über $\mathbb{R}$ (mit den üblichen Operationen)?

(a) $\mathbb{Z}^n$
(b) $\mathbb{Q}^n$
(c) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 1\}$
(d) $\{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \bigvee_{x\in[0,1]} f(x) = 0\}$
(e) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 0$ für alle bis auf endliche viele $x \in \mathbb{R}\}$
(f) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \bigwedge_{x\in\mathbb{R}} f(x) = -f(-x)\}$

Aufgabe 41. Bestimme im $\mathbb{R}^2$ die linearen Hüllen der Mengen

$$S_1 = \{(1,0)\}, \quad S_2 = \{(1,y) \mid y \in \mathbb{Z}\}, \quad S_3 = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{Z}\}$$

Aufgabe 42. Sei V ein Vektorraum und seien $M, N \subseteq V$ Teilmengen. Zeige, daß $[M] = [N]$ gilt genau dann, wenn

$$\bigwedge_{x\in M} x \in [N] \wedge \bigwedge_{x\in N} x \in [M]$$

Aufgabe 43. Bestimme eine Basis der linearen Hülle der Vektoren

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 44. Sei V ein Vektorraum und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei eine lineare unabhängige Teilmenge $M_n \subseteq V$ gegeben sodaß

$$(*) \qquad \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} M_n \subseteq M_{n+1}$$

für alle n gilt $M_n \subseteq M_{n+1}$.

(a) Zeige, daß $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ ebenfalls linear unabhängig ist.
(b) Gib ein Beispiel, das zeigt, daß diese Aussage ohne die Bedingung $(*)$ im Allgemeinen nicht gilt.