Aufgabe 45. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $a, b, c \in V$ drei linear unabhängige Vektoren. Untersuche, ob die Menge

$$\{a - b + c, a + b, b + c\}$$

linear unabhängig ist, und zwar für die Körper

(a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (b) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ (c) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$

Aufgabe 46. Sei $M = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ein Erzeugendensystem für einen Vektorraum V. Zeige, daß M eine Basis von V ist genau dann, wenn *mindestens* ein Vektor $v \in V$ eine eindeutige Darstellung als Linearkombination von M hat.

Aufgabe 47. Sei $V = (\mathbb{Z}_3)^4$,

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \subseteq V$$

und $U = \mathcal{L}(M)$. Bestimme alle Basen B von U, die aus M extrahiert werden können und bestimme jeweils die Koordinaten der Vektoren $v \in M \setminus B$.

Aufgabe 48. Betrachte die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^4$:

$$U_1 = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right], \qquad U_2 = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right]$$

Bestimme Basen B_1 und B_2 von U_1 und U_2 so, daß $B_1 \cap B_2$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$ und $B_1 \cup B_2$ eine Basis von $U_1 + U_2$ ist.

Aufgabe 49. Sei V ein Vektorraum und $U_i \subseteq V$ Unterräume.

(a) Zeige:

$$(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \subseteq U_1 \cap (U_2 + U_3)$$

(b) Gib ein Beispiel, in dem Gleichheit nicht gilt.

(c) Zeige: Wenn es eine Basis B von V gibt, sodaß $B = B_1 \dot\cup B_2 \dot\cup B_3$ (disjunkte Vereinigung) und $U_i = \mathcal{L}(B_i)$ für $i \in \{1, 2, 3\}$, dann gilt Gleichheit.

Aufgabe 50. Zeige anhand eines Beispiels im $\mathbb{R}^3$:
Die Aussage

$$U = U_1 \dot+ U_2 \dot+ U_3$$

ist *nicht* äquivalent zur Aussage

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \quad \wedge \quad U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{o\}$$