Aufgabe 51. Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum und $M \subseteq V$ ein beliebiges Erzeugendensystem. Zeige, daß man aus M eine endliches Erzeugendensystem auswählen kann.

Aufgabe 52. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{K}_3[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_i \in \mathbb{Z}_3\}$ und

$$U = \{f \in V \mid f(0) = 0 \wedge f(1) = 0\}.$$

Zeige, daß U einen Unteraum bildet, und bestimme eine Basis von U sowie Basen von zwei verschiedenen Unterräumen W_1 und W_2, sodaß $V = U \dot{+} W_1$ und $V = U \dot{+} W_2$.

Aufgabe 53. Seien V ein Vektorraum der Dimension n und U, $W \subseteq V$ zwei Unterräume der Dimension k.

(a) Überlege anhand des Dimensionssatzes, welche Dimensionen die Unterräume $U + W$ und $U \cap W$ annehmen können.

(b) Stelle fest, welche aus diesen Möglichkeiten tatsächlich auftreten:
  (a) $n = 7$, $k = 4$.
  (b) $n = 6$, $k = 3$.

Aufgabe 54. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ mit $|\mathbb{K}| \geq 3$. Zeige: Eine nichtleere Teilmenge $M \subseteq V$ ist genau dann eine lineare Mannigfaltigkeit, wenn gilt

$$\bigwedge_{a,b \in M} \bigwedge_{\lambda \in \mathbb{K}} \lambda a + (1 - \lambda) b \in M$$

Aufgabe 55. Sei $V = \mathbb{R}[x]$ und $U = \{f \in V \mid f(0) = 0\}$.

(a) Zeige, daß U einen Unterraum von V bildet.
(b) Bestimme für $f \in V$ die lineare Mannigfaltigkeit $f + U$.
(c) Bestimme eine Basis des Faktorraums $V_{/U}$.

Aufgabe 56. Welche der folgenden Abbildungen $V \to W$ sind linear?

(a) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$, $V = (\mathbb{Z}_3)^2$, $W = (\mathbb{Z}_3)^3$, $f : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, 0, x_2 - x_2)$.
(b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$, $f : (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.
(c) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{C}$, $f : z \mapsto \bar{z}$.
(d) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $V = W = \mathbb{C}$, $f : z \mapsto \bar{z}$.
(e) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $Tf(t) = f(2t - 1)$.