Aufgabe 57. Welche der folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, sind linear?
(a) $f : p(x) \mapsto p(x-1)$
(b) $f : p(x) \mapsto p(x) - 1$
(c) $f : p(x) \mapsto p(x) - x\,p(1)$
(d) $f : p(x) \mapsto x^2\,p(x)$
(e) $f : p(x) \mapsto p(x^2)$
(f) $f : p(x) \mapsto p(x)^2$

Aufgabe 58. Sei $V = U \dot{+} W$. Zeige, daß die Abbildung $p_U : V \to U$, $v = u + w \mapsto u$ linear ist.

Aufgabe 59. Sei $V = \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der reellen Polynome.
(a) Zeige, daß $V = U_+ \dot{+} U_-$, wobei

$$U_+ = \{f \in V \mid f(x) = f(-x)\} \qquad U_- = \{f \in V \mid f(x) = -f(-x)\}$$

(b) Bestimme die Projektionsabbildungen

$$P_+ : V \to U_+ \quad \text{und} \quad P_- : V \to U_-.$$

Aufgabe 60. Sei $V = (\mathbb{Z}_5)^3$. Zeige: es gibt genau eine lineare Abbildung $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to \mathbb{Z}_5$ mit den Werten

$$f((1,1,1)) = 1, \qquad f((1,4,1)) = 2, \qquad f((1,4,4)) = 4$$

Bestimme $a, b, c \in \mathbb{Z}_5$ so, daß $f((x_1, x_2, x_3)) = ax_1 + bx_2 + cx_3$ für alle $(x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{Z}_5)^3$.

Aufgabe 61. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Unterraum und $W \subseteq V$ ein Komplementärraum (d.h., $V = U \dot{+} W$). Zeige, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} f : W &\to V_{/U} \\ w &\mapsto w + U \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 62. Bestimme jeweils ein Basis von Kern- und Bildraum der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$