Aufgabe 63. Berechne alle möglichen paarweisen Produkte der Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 64. Bestimme die Matrix S_α der linearen Abbildung, die die Vektoren des $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $\{t \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ spiegelt. Berechne die Matrix $S_\alpha \cdot S_\beta$ und interpretiere die entsprechende lineare Abbildung geometrisch.

Aufgabe 65. Die Potenzen einer Matrix sind definiert durch $A^0 = I$ sowie $A^n = A \cdot A^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Hinweis: Zunächst $n = 1, 2, 3$ ausrechnen, dann die allgemeine Lösung erraten und durch Induktion beweisen.

Aufgabe 66. Zeige: Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ kommutiert mit allen Matrizen $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, d.h., $A \cdot B = B \cdot A$ für alle B, genau dann, wenn $A = \lambda I_n$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$.
Hinweis: Betrachte die Elementarmatrizen E_{ij}.

Aufgabe 67. Bringe die Matrix

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}$$

in möglichst wenigen Schritten auf die Form $I_{3,4}^{(r)}$ und bestimme Matrizen P und Q sodaß $PAQ = I_{3,4}^{(r)}$.

Aufgabe 68. Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ heißen äquivalent, $A \sim B$, wenn

$$\bigvee_{P \in GL(m,\mathbb{K})} \bigvee_{Q \in GL(n,\mathbb{K})} A = P \cdot B \cdot Q.$$

Zeige, daß Äquivalenz eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{K}^{m\times n}$ induziert.