Aufgabe 1. Von einem Parallelogramm seien die Punkte $A = (5, 2)$, $B = (4, 1)$, $C = (1, 1)$ gegeben. Bestimme die Koordinaten des vierten Punkts.

Aufgabe 2. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} \xi & + & 3\,\eta & + & \zeta & = & 2 \\ \xi & - & 2\,\eta & - & \zeta & = & 1 \\ 4\,\xi & + & 10\,\eta & + & 3\,\zeta & = & 8 \end{array}.$$

Welche geometrische Interpretation hat die Lösung?

Aufgabe 3. Begründe, für welche Werte des Parameters δ das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & \delta\,y & = & 1 \\ (2-\delta)\,x & + & y & = & 1 \end{array}$$

in den Unbekannten x, y lösbar ist und bestimme ggf. die Lösungsmenge.

Aufgabe 4. Sei $g = \{(1, 2) + \lambda(3, 4) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $E = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi - \eta + \zeta = 3\}$.

(a) Bestimme reelle Zahlen a, b, c, sodaß $g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a\,x + b\,y = c\}$.

(b) Bestimme Vektoren v_0, v_1, v_2 des $\mathbb{R}^3$, sodaß $E = \{v_0 + \lambda\,v_1 + \mu\,v_2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 5. Formuliere die Negation (=das logische Gegenteil) der folgenden Aussagen:

(a) Jeder Student besucht mindestens eine Vorlesung.

(b) Kein Student besucht alle Vorlesungen.

(c) Jeder Student besucht genau eine Vorlesung.

(d) Die Flasche ist leer.

(e) In der Nacht sind alle Katzen grau.

(f) Wer Sorgen hat, hat auch Likör.

(g) Essen und Trinken verboten.

Aufgabe 6. Seien A, B und C Mengen. Welche der folgenden Schlüsse sind zulässig?

(a) Angenommen, alle Elemente von B sind Element von A, kein Element von C ist Element von B; dann gilt: kein Element von C ist Element von A.

(b) Angenommen, kein Element von B ist Element von A, alle Elemente von C sind Elemente von B; dann gilt: kein Element von C ist Element von A.

Aufgabe 7. Formalisiere folgende Aussagen mittels Aussagenlogik.

(a) Von A, B und C gilt mindestens eines.

(b) Von A, B und C gilt genau eines.

(c) Von A, B und C gelten genau zwei.

Aufgabe 8. Zeige mit Hilfe von Wahrheitstafeln

(a) $A \dot\vee (B \dot\vee C) \iff (A \dot\vee B) \dot\vee C$

(b) $(A_1 \vee A_2) \to B \iff (A_1 \to B) \wedge (A_2 \to B)$

Aufgabe 9. Sei X eine nichtleere Menge, $P(x)$ ein Prädikat und B eine Aussage. Zeige anhand eines Beispiels, daß die Aussagen

$$\Big(\bigvee_{x\in X} P(x)\Big) \to B \quad \text{und} \quad \bigvee_{x\in X} (P(x) \to B)$$

im Allgemeinen nicht äquivalent sind. Welche der beiden Aussagen ist stärker, d.h., impliziert die andere?

Aufgabe 10. Überprüfe, ob die folgenden Aussagen wahr sind:

(a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

(b) $\{\emptyset\} \subseteq P(\{\emptyset, \{\{\}\}\})$, $\{\emptyset\} \in P(\{\emptyset, \{\{\}\}\})$.

(c) $M \in P(M)$, $M \subseteq P(M)$, $\{M\} \in P(M)$, $\{M\} \subseteq P(M)$.

Aufgabe 11. (a) Lies zur Einstimmung auf die kommenden Wochen den Monolog des Mephistopheles (Verse 1908–1941 aus Goethes *Faust I*).

(b) Formalisiere die Verse 1928–1933 und bringe sie auf möglichst kompakte Form. Diese lauten:

Der Philosoph, der tritt herein
Und beweist Euch, es müßt so sein:
Das Erst wär so, das Zweite so,
Und drum das Dritt' und Vierte so;
Und wenn das Erst' und Zweit' nicht wär,
Das Dritt' und Viert' wär nimmermehr.

Aufgabe 12. Überprüfe die folgenden Relationen auf die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie, Transitivität, Äquivalenzrelation, Ordnungsrelation, Totalordnung und bestimme ggf. die Äquivalenzklassen.

(a) $X = \mathcal{P}(Y)$, wobei Y eine fixe Menge ist, Relation $xRy :\iff x \subseteq y$.
(b) $X = \mathbb{R}^2$, Relation $(x_1, x_2)R(y_1, y_2) :\iff x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$.
(c) $X = \mathbb{N}$, $R = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
(d) $X = \mathbb{Z}$, Relation $mRn :\iff m - n$ ungerade.

Aufgabe 13. Eine Partition einer Menge X wurde definiert als eine Teilmenge $Z \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ mit den Eigenschaften

(i)
$$\bigcup_{A \in Z} A = X$$

(ii)
$$\bigwedge_{A,B \in Z} (A \neq B \implies A \cap B = \emptyset)$$

(a) Zeige, daß eine Teilmenge $Z \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Partition ist genau dann, wenn gilt

$$\bigwedge_{x \in X} \dot{\bigvee_{A \in Z}} x \in A$$

(b) Sei $Z \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X})$ eine Partition einer Menge X. Zeige, daß durch

$$x \sim y :\iff \bigvee_{A \in Z} x \in A \wedge y \in A$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert wird sodaß $X/_{\sim} = Z$.

Aufgabe 14. Sei $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{(1, 3), (4, 3)\} \subseteq A \times A$. Bestimme die kleinste Äquivalenzrelation auf A, die B umfaßt und gib die zugehörigen Äquivalenzklassen an.

Aufgabe 15. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeige oder widerlege:

(a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ für alle $A, B \subseteq X$.
(b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ für alle $A, B \subseteq Y$.
(c) Wenn $f(A^c) = f(A)^c$ für alle $A \subseteq X$ gilt, dann ist f bijektiv.

Aufgabe 16. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen. Zeige oder widerlege:

1. $g \circ f$ surjektiv $\implies$ f surjektiv
2. $g \circ f$ surjektiv $\implies$ g surjektiv
3. $g \circ f$ injektiv $\implies$ f injektiv
4. $g \circ f$ injektiv $\implies$ g injektiv

Aufgabe 17. Sei $f : X \to \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung, die jedem $x \in X$ eine Teilmenge $f(x) \subseteq X$ zuordnet.

(a) Zeige, daß die Menge $U = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ nicht im Bildbereich von f liegen kann.

(b) Zeige: Es gibt keine surjektive Abbildung $X \to \mathcal{P}(X)$ und keine injektive Abbildung $\mathcal{P}(X) \to X$.

Aufgabe 18. Untersuche die folgenden linearen Gleichungssysteme auf Lösbarkeit und bestimme, wenn möglich, alle Lösungen:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & & & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 6x_4 & = & 2 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & & & = & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 6x_4 & = & -5 \end{array}$$

Hinweis: Beide Systeme können simultan behandelt werden.

Aufgabe 19. Für welche Werte von α, $\beta \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & \beta \\ x_1 & + & 2x_2 & + & \alpha x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}$$

keine/eine eindeutige/unendlich viele Lösungen?

Aufgabe 20. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 1 \\ &\vdots \\ x_{n-1} - x_n &= 1 \\ \alpha x_n - x_1 &= \beta \end{aligned}$$

keine/eine eindeutige/unendlich viele Lösungen?

Aufgabe 21. Zeige mittels Vektorrechnung, daß die Schwerlinien eines Dreiecks (auch *Seitenhalbierende* genannt) einander in einem Punkt schneiden und bestimme diesen Punkt.

Aufgabe 22. Gegeben sei eine Ebene e, eine Gerade g und ein Punkt P. Finde die Parameterdarstellung derjenigen Geraden, die zu e parallel ist, durch P geht und g in einem Punkt schneidet.

$$e = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \qquad g = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \qquad P = (1, 1, 2)$$

Aufgabe 23. Welche der folgenden Strukturen $(X, \circ)$ sind Halbgruppen, Monoide, Gruppen? Bestimme ggf. neutrale und inverse Elemente und untersuche, ob die Verknüpfungen kommutativ sind.

(1) $X = \mathbb{R}_0^+$, Verknüpfung $a \circ b = |a - b|$
(2) $X = \mathbb{R}$, Verknüpfung $a \circ b = \min(a, b)$
(3) $X = \mathbb{R}$, Verknüpfung $a \circ b = |a|\, b$
(4) $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, Verknüpfung $(a, b) \circ (c, d) = (ac, bc + d)$

Aufgabe 24. Sei X eine Menge. Zeige, daß die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ mit der Verknüpfung

$$A \circ B = A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

eine Gruppe bildet.

Aufgabe 25. Zeige: Eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist, d.h., mit der Ziffernentwicklung $n = \sum_{i \geq 0} a_i 10^i$ gilt

$$11 \text{ teilt } n \iff 11 \text{ teilt } \sum_{i \geq 0} (-1)^i a_i$$

Aufgabe 26. Bestimme alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ der Gleichungen

(a) $$6x \equiv 3 \mod 9$$
(b) $$6x \equiv 4 \mod 9$$
(c) $$4x + 3 \equiv 1 \mod 7$$
(d) $$4x + 5 \equiv 2 \mod 9$$

Aufgabe 27. (a) Erstelle die Verknüpfungstafel der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_3$.
(b) Rechne nach, daß die Abbildung

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \mapsto 1 \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix} \mapsto -1 \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix} \mapsto -1$$
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} \mapsto 1 \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix} \mapsto 1 \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \mapsto -1$$

von $(\mathfrak{S}_3, \circ) \to (\{\pm 1\}, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 28. (a) Sei $h : G_1 \to G_2$ ein Isomorphismus zwischen zwei Gruppen G_1 und G_2. Zeige, daß $h^{-1} : G_2 \to G_1$ ebenfalls ein Homomorphismus ist.
(b) Sei X eine Menge von Gruppen[†]. Zeige, daß durch

$$G \simeq G' :\iff G \text{ und } G' \text{ sind isomorph}$$

eine Äquivalenzrelation auf X erklärt wird.

Aufgabe 29. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeige, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} f : G &\to G \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

bijektiv ist und daß f ein Automorphismus ist genau dann, wenn G abelsch ist.

Aufgabe 30. Sei $h : G_1 \to G_2$ ein Gruppenhomomorphismus und $H_2 \subseteq G_2$ eine Untergruppe. Zeige, daß $h^{-1}(H_2)$ eine Untergruppe von G_1 ist.

Aufgabe 31. Eine abelsche Gruppe heißt *einfach*, wenn sie keine nichttrivialen Untergruppen besitzt. Zeige, daß $(\mathbb{Z}_n, +)$ einfach ist genau dann, wenn $n \in \mathbb{P}$ (Primzahl).

Aufgabe 32. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $x \in G$ ein fixes Element. Zeige, daß $(G, \odot)$ mit der Operation

$$a \odot b := a \circ x \circ b$$

eine zu $(G, \circ)$ isomorphe Gruppe ist.

Aufgabe 33. Zeige, daß $\mathbb{R}^2$ mit den Operationen

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) + (b_1, b_2) &:= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) &:= (a_1 b_1 + a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned}$$

einen kommutativen Ring bildet und bestimme Einselement, Nullteiler und invertierbare Elemente.

[†]Die „Menge aller Gruppen" existiert nicht!

Aufgabe 34. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & & & + & 4\,z & = & 1 \\ 2\,x & + & 2\,y & + & 2\,z & = & 2 \\ x & + & 3\,y & + & 2\,z & = & 3 \end{array}$$

über dem Körper $\mathbb{Z}_7$.

Aufgabe 35. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} i\,x & + & y & + & z & = & 1+i \\ (1+2i)\,x & + & 3\,y & + & (1+i)\,z & = & 4+i \\ -x & + & (-1+i)\,y & - & z & = & -1+i \end{array}$$

über dem Körper der komplexen Zahlen.

Aufgabe 36. Zeige, daß

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

ein Teilkörper von $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 37. Skizziere die folgenden Mengen in der komplexen Ebene:
(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} + z\bar{z} < 1\}$.
(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z^2) \leq 2\}$.

Aufgabe 38. Welche der folgenden Mengen sind Vektorräume (mit den üblichen Operationen)?
(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 1\}$
(b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \neq 0\}$
(c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_3 = 0\}$
(d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \leq x_3\}$
(e) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3\}$
(f) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \neq x_3\}$
(g) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\}$
(h) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i = 0 \text{ für mindestens ein } i \in \{1, 2, 3\}\}$

Aufgabe 39. Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit den Operationen

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', 0)$$
$$\lambda \odot (x, y) = (\lambda x, 0)$$

Welche Vektorraumaxiome sind erfüllt?

Aufgabe 40. Welche der folgenden Mengen sind Vektorräume über $\mathbb{R}$ (mit den üblichen Operationen)?

(a) $\mathbb{Z}^n$
(b) $\mathbb{Q}^n$
(c) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 1\}$
(d) $\{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \bigvee_{x\in[0,1]} f(x) = 0\}$
(e) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 0$ für alle bis auf endliche viele $x \in \mathbb{R}\}$
(f) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \bigwedge_{x\in\mathbb{R}} f(x) = -f(-x)\}$

Aufgabe 41. Bestimme im $\mathbb{R}^2$ die linearen Hüllen der Mengen

$$S_1 = \{(1,0)\}, \quad S_2 = \{(1,y) \mid y \in \mathbb{Z}\}, \quad S_3 = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{Z}\}$$

Aufgabe 42. Sei V ein Vektorraum und seien $M, N \subseteq V$ Teilmengen. Zeige, daß $[M] = [N]$ gilt genau dann, wenn

$$\bigwedge_{x\in M} x \in [N] \wedge \bigwedge_{x\in N} x \in [M]$$

Aufgabe 43. Bestimme eine Basis der linearen Hülle der Vektoren

$$\begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\-5\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix}$$

Aufgabe 44. Sei V ein Vektorraum und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei eine lineare unabhängige Teilmenge $M_n \subseteq V$ gegeben sodaß

$$(*) \qquad \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} M_n \subseteq M_{n+1}$$

für alle n gilt $M_n \subseteq M_{n+1}$.

(a) Zeige, daß $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ ebenfalls linear unabhängig ist.
(b) Gib ein Beispiel, das zeigt, daß diese Aussage ohne die Bedingung $(*)$ im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 45. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $a, b, c \in V$ drei linear unabhängige Vektoren. Untersuche, ob die Menge

$$\{a - b + c, a + b, b + c\}$$

linear unabhängig ist, und zwar für die Körper

$$\text{(a)} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R} \qquad \text{(b)} \quad \mathbb{K} = \mathbb{Z}_2 \qquad \text{(c)} \quad \mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$$

Aufgabe 46. Sei $M = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ein Erzeugendensystem für einen Vektorraum V. Zeige, daß M eine Basis von V ist genau dann, wenn *mindestens* ein Vektor $v \in V$ eine eindeutige Darstellung als Linearkombination von M hat.

Aufgabe 47. Sei $V = (\mathbb{Z}_3)^4$,

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \subseteq V$$

und $U = \mathcal{L}(M)$. Bestimme alle Basen B von U, die aus M extrahiert werden können und bestimme jeweils die Koordinaten der Vektoren $v \in M \setminus B$.

Aufgabe 48. Betrachte die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^4$:

$$U_1 = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right], \qquad U_2 = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right]$$

Bestimme Basen B_1 und B_2 von U_1 und U_2 so, daß $B_1 \cap B_2$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$ und $B_1 \cup B_2$ eine Basis von $U_1 + U_2$ ist.

Aufgabe 49. Sei V ein Vektorraum und $U_i \subseteq V$ Unterräume.

(a) Zeige:

$$(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \subseteq U_1 \cap (U_2 + U_3)$$

(b) Gib ein Beispiel, in dem Gleichheit nicht gilt.

(c) Zeige: Wenn es eine Basis B von V gibt, sodaß $B = B_1 \dot\cup B_2 \dot\cup B_3$ (disjunkte Vereinigung) und $U_i = \mathcal{L}(B_i)$ für $i \in \{1, 2, 3\}$, dann gilt Gleichheit.

Aufgabe 50. Zeige anhand eines Beispiels im $\mathbb{R}^3$:
Die Aussage

$$U = U_1 \dot+ U_2 \dot+ U_3$$

ist *nicht* äquivalent zur Aussage

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \quad \wedge \quad U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{o\}$$

Aufgabe 51. Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum und $M \subseteq V$ ein beliebiges Erzeugendensystem. Zeige, daß man aus M eine endliches Erzeugendensystem auswählen kann.

Aufgabe 52. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{K}_3[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_i \in \mathbb{Z}_3\}$ und

$$U = \{f \in V \mid f(0) = 0 \wedge f(1) = 0\}.$$

Zeige, daß U einen Unteraum bildet, und bestimme eine Basis von U sowie Basen von zwei verschiedenen Unterräumen W_1 und W_2, sodaß $V = U \dot{+} W_1$ und $V = U \dot{+} W_2$.

Aufgabe 53. Seien V ein Vektorraum der Dimension n und U, $W \subseteq V$ zwei Unterräume der Dimension k.

(a) Überlege anhand des Dimensionssatzes, welche Dimensionen die Unterräume $U + W$ und $U \cap W$ annehmen können.

(b) Stelle fest, welche aus diesen Möglichkeiten tatsächlich auftreten:
  (a) $n = 7$, $k = 4$.
  (b) $n = 6$, $k = 3$.

Aufgabe 54. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ mit $|\mathbb{K}| \geq 3$. Zeige: Eine nichtleere Teilmenge $M \subseteq V$ ist genau dann eine lineare Mannigfaltigkeit, wenn gilt

$$\bigwedge_{a,b \in M} \bigwedge_{\lambda \in \mathbb{K}} \lambda a + (1 - \lambda) b \in M$$

Aufgabe 55. Sei $V = \mathbb{R}[x]$ und $U = \{f \in V \mid f(0) = 0\}$.

(a) Zeige, daß U einen Unterraum von V bildet.

(b) Bestimme für $f \in V$ die lineare Mannigfaltigkeit $f + U$.

(c) Bestimme eine Basis des Faktorraums $V_{/U}$.

Aufgabe 56. Welche der folgenden Abbildungen $V \to W$ sind linear?

(a) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$, $V = (\mathbb{Z}_3)^2$, $W = (\mathbb{Z}_3)^3$, $f : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, 0, x_2 - x_2)$.

(b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$, $f : (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

(c) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{C}$, $f : z \mapsto \bar{z}$.

(d) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $V = W = \mathbb{C}$, $f : z \mapsto \bar{z}$.

(e) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $Tf(t) = f(2t - 1)$.

Aufgabe 57. Welche der folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, sind linear?
(a) $f : p(x) \mapsto p(x-1)$
(b) $f : p(x) \mapsto p(x) - 1$
(c) $f : p(x) \mapsto p(x) - x\, p(1)$
(d) $f : p(x) \mapsto x^2\, p(x)$
(e) $f : p(x) \mapsto p(x^2)$
(f) $f : p(x) \mapsto p(x)^2$

Aufgabe 58. Sei $V = U \dot{+} W$. Zeige, daß die Abbildung $p_U : V \to U$, $v = u + w \mapsto u$ linear ist.

Aufgabe 59. Sei $V = \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der reellen Polynome.
(a) Zeige, daß $V = U_+ \dot{+} U_-$, wobei

$$U_+ = \{f \in V \mid f(x) = f(-x)\} \qquad U_- = \{f \in V \mid f(x) = -f(-x)\}$$

(b) Bestimme die Projektionsabbildungen

$$P_+ : V \to U_+ \quad \text{und} \quad P_- : V \to U_-.$$

Aufgabe 60. Sei $V = (\mathbb{Z}_5)^3$. Zeige: es gibt genau eine lineare Abbildung $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to \mathbb{Z}_5$ mit den Werten

$$f((1,1,1)) = 1, \qquad f((1,4,1)) = 2, \qquad f((1,4,4)) = 4$$

Bestimme $a, b, c \in \mathbb{Z}_5$ so, daß $f((x_1, x_2, x_3)) = ax_1 + bx_2 + cx_3$ für alle $(x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{Z}_5)^3$.

Aufgabe 61. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Unterraum und $W \subseteq V$ ein Komplementärraum (d.h., $V = U \dot{+} W$). Zeige, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} f : W &\to V_{/U} \\ w &\mapsto w + U \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 62. Bestimme jeweils ein Basis von Kern- und Bildraum der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 63. Berechne alle möglichen paarweisen Produkte der Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 64. Bestimme die Matrix S_α der linearen Abbildung, die die Vektoren des $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $\{t \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ spiegelt. Berechne die Matrix $S_\alpha \cdot S_\beta$ und interpretiere die entsprechende lineare Abbildung geometrisch.

Aufgabe 65. Die Potenzen einer Matrix sind definiert durch $A^0 = I$ sowie $A^n = A \cdot A^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Hinweis: Zunächst $n = 1, 2, 3$ ausrechnen, dann die allgemeine Lösung erraten und durch Induktion beweisen.

Aufgabe 66. Zeige: Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ kommutiert mit allen Matrizen $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, d.h., $A \cdot B = B \cdot A$ für alle B, genau dann, wenn $A = \lambda I_n$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$.
Hinweis: Betrachte die Elementarmatrizen E_{ij}.

Aufgabe 67. Bringe die Matrix

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}$$

in möglichst wenigen Schritten auf die Form $I_{3,4}^{(r)}$ und bestimme Matrizen P und Q sodaß $PAQ = I_{3,4}^{(r)}$.

Aufgabe 68. Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ heißen äquivalent, $A \sim B$, wenn

$$\bigvee_{P \in GL(m,\mathbb{K})} \bigvee_{Q \in GL(n,\mathbb{K})} A = P \cdot B \cdot Q.$$

Zeige, daß Äquivalenz eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{K}^{m\times n}$ induziert.

Aufgabe 69. Bestimme eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ sodaß

$$\ker f_A = \mathcal{L}(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})$$

Aufgabe 70. Invertiere die Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

über $\mathbb{Z}_3$.

Aufgabe 71. Zeige, daß die unteren Dreiecksmatrizen eine Teilalgebra der $n\times n$-Matrizen bilden; d.h., daß Linearkombinationen, Produkte und Inverse von Dreiecksmatrizen wieder Dreiecksmatrizen sind.

Aufgabe 72. Führe die LR-Zerlegung $PA = LR$ der Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

durch.