Aufgabe 11. Formalisiere folgende Aussagen mittels Aussagenlogik.
(a) Von A, B und C gelten genau zwei.
(b) Von A, B und C gilt mindestens eines.
(c) Von A, B und C gilt genau eines.

Aufgabe 12. Seien X, Y nichtleere Mengen, $P(x)$ und $Q(x,y)$ Prädikate und A eine Aussage.
(a) Zeige, daß
$$A \to \forall x \in X : P(x) \iff \forall x \in X : A \to P(x).$$
(b) Zeige anhand eines Beispiels, daß die Aussagen
$$\exists x \in X \forall y \in Y : Q(x,y) \text{ und } \forall y \in Y \exists x \in X : Q(x,y)$$
im Allgemeinen nicht äquivalent sind. Welche der beiden Aussagen ist stärker, d.h., impliziert die andere?

Aufgabe 13. Gegeben sei die Mengenfamilie $(A_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ mit $A_i = \{-i, -i+1, \dots, i-1, i\} \subseteq \mathbb{Z}$. Bestimme die Mengen
$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} A_i \qquad \bigcap_{i\in\mathbb{N}_0} A_i \qquad \bigcup_{i\in 2\mathbb{N}-1} A_i \qquad \bigcap_{i\in 2\mathbb{N}-1} A_i$$
wobei $2\mathbb{N} - 1 = \{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, \dots\}$ die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen bezeichnet.

Aufgabe 14. Überprüfe die folgenden Relationen auf die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie, Transitivität, Äquivalenzrelation, Ordnungsrelation, Totalordnung und bestimme ggf. die Äquivalenzklassen.
(a) $X = \mathcal{P}(Y)$, wobei Y eine fixe Menge ist, Relation $xRy :\iff x \supseteq y$.
(b) $X = \mathbb{N}$, Relation: $mRn \iff \operatorname{ggT}(m,n) \neq 1$.
(c) $X = \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$ eine fixe Zahl, Relation: $mRn :\iff \exists k \in \mathbb{Z} : m - n = k \cdot d$.
(d) A beliebig, $X = \mathcal{P}(A)$ und $R = \{(U,V) \mid U, V \subseteq A \text{ mit } |U| = |V|\} \subseteq X \times X$.

Aufgabe 15. Sei $X = \{1,2,3,4\}$ und $S = \{(1,2),(3,2)\} \subseteq X \times X$. Bestimme die kleinste Äquivalenzrelation auf X, die S umfaßt und gib die zugehörigen Äquivalenzklassen an.