

Aufgabe 16. Untersuche, ob die folgenden Relationen Äquivalenzrelationen sind und bestimme ggf. die Äquivalenzklassen.

(a) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, Relation $(a, b)R(c, d) : \iff ad = bc$

(b) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, Relation $(a, b)R(c, d) : \iff ad = bc$

Aufgabe 17. Eine Partition einer Menge X wurde definiert als eine Teilmenge $Z \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ mit den Eigenschaften

$$(0.1) \quad \bigcup_{A \in Z} A = X \quad \text{und} \quad \forall A, B \in Z : (A \neq B \implies A \cap B = \emptyset)$$

(a) Zeige, daß eine Teilmenge $Z \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Partition ist genau dann, wenn gilt

$$\forall x \in X \exists! A \in Z : x \in A$$

(b) Sei $Z \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Partition einer Menge X . Zeige, daß durch

$$x \sim y : \iff \exists A \in Z : x \in A \wedge y \in A$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert wird mit der Eigenschaft, daß $X/\sim = Z$.

Aufgabe 18. Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Funktionen. Zeige oder widerlege:

1. $g \circ f$ surjektiv $\implies f$ surjektiv
2. $g \circ f$ surjektiv $\implies g$ surjektiv
3. $g \circ f$ injektiv $\implies f$ injektiv
4. $g \circ f$ injektiv $\implies g$ injektiv

Aufgabe 19. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Zeige oder widerlege:

- (a) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ für alle $A, B \subseteq X$.
- (b) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$ für alle $A, B \subseteq Y$.
- (c) Wenn eine der obigen Gleichheiten nicht gilt, zeige, daß zumindest eine Teilmengenrelation ($\subseteq$ oder $\supseteq$) gilt.
- (d) Ändert sich etwas an den Aussagen, wenn f als injektiv oder surjektiv vorausgesetzt wird?

Aufgabe 20. Untersuche die folgenden linearen Gleichungssysteme mittels Gauß-Jordan-Elimination auf Lösbarkeit und bestimme, wenn möglich, alle Lösungen:

$$\begin{array}{rclcl} -x_1 & & -2x_3 & -4x_4 & = 1 & & -x_1 & & -2x_3 & -4x_4 & = -1 \\ 3x_1 & -4x_2 & +5x_3 & +5x_4 & = 2 & \text{und} & 3x_1 & -4x_2 & +5x_3 & +5x_4 & = -5 \\ 2x_1 & -x_2 & +4x_3 & +5x_4 & = 1 & & 2x_1 & -x_2 & +4x_3 & +5x_4 & = 1 \\ 2x_1 & +x_2 & +5x_3 & +6x_4 & = 2 & & 2x_1 & +x_2 & +5x_3 & +6x_4 & = 5 \end{array}$$

Hinweis: Beide Systeme können simultan behandelt werden.