

Aufgabe 21. Für welche Werte von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} -3x_1 - 3x_2 + \alpha x_3 & = & \beta \\ -x_1 - 2x_2 - \alpha x_3 & = & -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & 3 \end{array}$$

keine/eine eindeutige/unendlich viele Lösungen?

Aufgabe 22. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= 1 \\ x_3 - x_2 &= 1 \\ &\vdots \\ x_n - x_{n-1} &= 1 \\ \alpha x_n + x_1 &= \beta \end{aligned}$$

keine/eine eindeutige/unendlich viele Lösungen?

Aufgabe 23. Zeige mittels Vektorrechnung, daß die Schwerlinien eines Dreiecks (auch *Seitenhalbierende* genannt) einander in einem Punkt schneiden und bestimme diesen Punkt.

Aufgabe 24. Welche der folgenden Strukturen (X, \circ) sind Halbgruppen, Monoide, Gruppen? Bestimme ggf. neutrale, invertierbare und inverse Elemente und untersuche, ob die Verknüpfungen kommutativ sind.

- (a) $X = \mathbb{N}_0$, Verknüpfung $a \circ b = \text{ggT}(a, b)$, wobei $\text{ggT}(0, 0) := 0$ definiert sein soll.
- (b) $X = \{a, b, c\}$, Verknüpfungstabelle

| \circ | a | b | c |
|---------|-----|-----|-----|
| a | a | b | c |
| b | b | a | c |
| c | c | b | a |

- (c) $X = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, Verknüpfung $(a, b) \circ (c, d) = (a + bc, bd)$

Aufgabe 25. Zeige, daß $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ mit der Verknüpfung

$$a \circ b := a + b + ab$$

eine Gruppe ist. Löse in G die Gleichung

$$5 \circ x \circ 6 = 17$$