

**Aufgabe 21.** Für welche Werte von  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  hat das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcr} -3x_1 & - & 3x_2 & + & \alpha x_3 & = & \beta \\ -x_1 & - & 2x_2 & - & \alpha x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}$$

keine/eine eindeutige/unendlich viele Lösungen?

**Aufgabe 22.** Sei  $n \geq 2$  eine natürliche Zahl. Für welche  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} x_2 - x_1 = 1 \\ x_3 - x_2 = 1 \\ \vdots \\ x_n - x_{n-1} = 1 \\ \alpha x_n + x_1 = \beta \end{array}$$

keine/eine eindeutige/unendlich viele Lösungen?

**Aufgabe 23.** Zeige mittels Vektorrechnung, daß die Schwerlinien eines Dreiecks (auch *Seitenhalbierende* genannt) einander in einem Punkt schneiden und bestimme diesen Punkt.

**Aufgabe 24.** Welche der folgenden Strukturen  $(X, \circ)$  sind Halbgruppen, Monoide, Gruppen? Bestimme ggf. neutrale, invertierbare und inverse Elemente und untersuche, ob die Verknüpfungen kommutativ sind.

(a)  $X = \mathbb{N}_0$ , Verknüpfung  $a \circ b = \text{ggT}(a, b)$ , wobei  $\text{ggT}(0, 0) := 0$  definiert sein soll.

(b)  $X = \{a, b, c\}$ , Verknüpfungstabelle

$\circ$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$b$	$c$
$b$	$b$	$a$	$c$
$c$	$c$	$b$	$a$

(c)  $X = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ , Verknüpfung  $(a, b) \circ (c, d) = (a + bc, bd)$

**Aufgabe 25.** Zeige, daß  $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  mit der Verknüpfung

$$a \circ b := a + b + ab$$

eine Gruppe ist. Löse in  $G$  die Gleichung

$$5 \circ x \circ 6 = 17$$