

**Aufgabe 26.** Sei  $(G, \circ)$  eine Halbgruppe. Wir betrachten folgende Eigenschaften:

- (i)  $\exists e \in G \forall a \in G : e \circ a = a$
  - (ii)  $\forall a \in G \exists b \in G : a \circ b = e$
  - (iii)  $\forall a \in G \exists b \in G \forall c \in G : a \circ b \circ c = c$
- (a) Zeige, daß  $(i) \wedge (ii) \iff (iii)$ .
- (b) Finde ein Beispiel einer Halbgruppe, die die Eigenschaften (i)–(iii) aufweist, aber keine Gruppe ist.

**Aufgabe 27.** Erstelle die Verknüpfungstafel der Symmetriegruppe eines Quadrats  $ABCD$  und Stelle die Elemente als Permutationen der Eckpunkte dar.

**Aufgabe 28.** Erstelle die Verknüpfungstafel der multiplikativen Halbgruppe  $(\mathbb{Z}_9^*, \cdot)$  und bestimme alle invertierbaren Elemente.

**Aufgabe 29.** Bestimme alle Lösungen  $x \in \mathbb{Z}$  der Gleichungen

- (a)  $12x \equiv 4 \pmod{16}$
- (b)  $12x \equiv 6 \pmod{16}$
- (c)  $4x + 5 \equiv 3 \pmod{7}$
- (d)  $4x + 7 \equiv 4 \pmod{9}$

**Aufgabe 30.** Sei  $(G, \circ)$  eine Gruppe. Zeige, daß die Abbildung

$$f : G \rightarrow G \\ x \mapsto x^{-1}$$

bijektiv ist und daß  $f$  ein Automorphismus ist genau dann, wenn  $G$  abelsch ist.