

Aufgabe 31. Zeige, daß $\mathbb{R}^2$ mit den Operationen

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) + (b_1, b_2) &:= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) &:= (a_1 b_1, a_1 b_2 + a_2 b_1)\end{aligned}$$

einen kommutativen Ring bildet und bestimme Einselement, Nullteiler und invertierbare Elemente.

Aufgabe 32. Wir betrachten $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ mit den Verknüpfungen

$$a \oplus b = \max(a, b) \quad a \odot b = a + b$$

- (a) Welche Ringaxiome sind erfüllt? Welches Element muß hinzugefügt werden, um ein neutrales Element bezüglich der Addition $\oplus$ zu erhalten?
(b) Löse das “lineare” Gleichungssystem

$$\begin{aligned}((-1) \odot x) \oplus (\epsilon \odot y) &= 1 \\ ((-2) \odot x) \oplus (0 \odot y) &= 1\end{aligned}$$

wobei ϵ das unter (a) gefundene neutrale Element bezüglich Addition bezeichnet.

Aufgabe 33. Skizziere die folgenden Mengen in der komplexen Ebene:

- (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} < 1 + z + \bar{z}\}$.
(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z^2) \leq 4\}$.

Aufgabe 34. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcrcl}x & - & y & + & 4z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 3\end{array}$$

über dem Körper $\mathbb{Z}_7$.

Aufgabe 35. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcl}x & + & iy & + & iz & = & -1 + i \\ (1 - 2i)x & - & (1 + 2i)y & + & (1 - i)z & = & 2 - i \\ -x & + & (-1 + i)y & - & z & = & -1 - i\end{array}$$

über dem Körper der komplexen Zahlen.