Aufgabe 36. Welche der folgenden Strukturen sind Vektorräume?

(a) $V = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ mit den üblichen Operationen.
(b) $V = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mit den üblichen Operationen.
(c) $V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f(x) = 0$ bis auf endlich viele $x\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mit den üblichen Operationen $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$.
(d) $V = \{f : \mathbb{R} \to [0,1] \mid f(x) = 0$ bis auf endlich viele $x\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, Operationen wie in Punkt (c).
(e) $V = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mit den Operationen

$$a \oplus b := \sqrt[3]{a^3 + b^3} \qquad \lambda \odot a := \sqrt[3]{\lambda} \cdot a.$$

Aufgabe 37. Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element n und $\mathbb{Z}_2$ der Restklassenkörper modulo 2. Wir erklären die Skalarmultiplication $\odot : \mathbb{Z}_2 \times G \to G$ durch $0 \odot g := n$, $1 \odot g := g$.

(a) Welche Bedingung muß die Gruppe G erfüllen, damit G mit diesen Operationen ein Vektorraum über $\mathbb{Z}_2$ ist?
(b) Gib jeweils Beispiele von Gruppen, die diese Eigenschaft haben bzw. nicht haben.

Aufgabe 38. Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume des Vektorraums $\mathbb{R}^3$?

(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \leq 0\}$
(b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_2 = 0\}$
(c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3\}$
(d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = x_3\}$
(e) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \neq x_3\}$
(f) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i = 0$ für mindestens ein $i \in \{1, 2, 3\}\}$