

Aufgabe 44. Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum über \mathbb{K} mit Basis $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ und seien $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ Vektoren mit eindeutigen Darstellungen $v_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} b_j$.

Zeige: $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ist linear unabhängig genau dann, wenn die Menge der Koordinatenvektoren

$$\{(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1n}), (\lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2n}), \dots, (\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kn})\}$$

linear unabhängig in \mathbb{K}^n ist.

Aufgabe 45. Wir betrachten die folgenden Unterräume des \mathbb{R}^4 :

$$U = \mathcal{L} \left(\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} \right), \quad W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} 3x_1 - 5x_2 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

Berechne Basen $B_U, B_W, B_{U \cap W}$ und B_{U+W} der Räume $U, W, U \cap W, U + W$, sodaß die folgenden Relationen erfüllt sind:

$$\begin{array}{ccc} & B_U & \\ & \subset & \subset \\ B_{U \cap W} & & B_{U+W} \\ & \supset & \supset \\ & B_W & \end{array}$$

und stelle fest, in welchen dieser Räume der Vektor $[0, -1, 0, -4]$ enthalten ist.

Aufgabe 46. Gib drei Untervektorräume U, V und W des \mathbb{R}^2 an, sodaß zwar $U \cap V = \{0\}$, $V \cap W = \{0\}$ und $U \cap W = \{0\}$, aber $U + V + W$ keine direkte Summe ist.

Aufgabe 47. Sei V ein Vektorraum und $U_i \subseteq V$ Unterräume.

(a) Zeige:

$$(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \subseteq U_1 \cap (U_2 + U_3)$$

(b) Gib ein Beispiel, in dem Gleichheit nicht gilt.

(c) Zeige: Wenn U_2 in U_1 enthalten ist, dann gilt Gleichheit.

Aufgabe 48. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $U_1, U_2, \dots, U_r \subseteq V$ Unterräume, sodaß $V = U_1 + U_2 + \dots + U_r$. Zeige:

$$V = U_1 \dot{+} U_2 \dot{+} \dots \dot{+} U_r \iff \dim V = \dim U_1 + \dim U_2 + \dots + \dim U_r$$

Aufgabe 49. Sei V ein Vektorraum der Dimension n und seien U und W zwei verschiedene Unterräume der Dimension $n - 1$. Zeige, daß $\dim(U \cap W) = n - 2$.