

Aufgabe 50. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ mit $|\mathbb{K}| \geq 3$. Zeige: Eine nichtleere Teilmenge $M \subseteq V$ ist genau dann eine lineare Mannigfaltigkeit, wenn gilt

$$\bigwedge_{a,b \in M} \bigwedge_{\lambda \in \mathbb{K}} \lambda a + (1 - \lambda)b \in M$$

Aufgabe 51. Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ betrachten wir den Unterraum

$$U = \mathcal{L} \left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right)$$

- (a) Bestimme ein Repräsentantensystem S für den Faktorraum V/U , das zugleich ein Unterraum von V ist.
- (b) Welche der folgenden Abbildungen von V/U nach $\mathbb{R}$ ist wohldefiniert?

$$f([x]_U) = x_1 + x_2 + x_3$$

$$g([x]_U) = x_1 - x_2 - x_3$$

Aufgabe 52. Sei $V = \mathbb{R}[x]$ und $U = \{f \in V \mid f(0) = 0\}$.

- (a) Zeige, daß U einen Unterraum von V bildet.
- (b) Bestimme für $f \in V$ die lineare Mannigfaltigkeit $f + U$.
- (c) Bestimme eine Basis des Faktorraums V/U .

Aufgabe 53. Welche der folgenden Abbildungen $V \rightarrow W$ sind linear?

- (a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$, $f : (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.
- (b) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{Z}_3^2$, $W = \mathbb{Z}_3$, $f : (x_1, x_2) \mapsto x_1^3 + x_2^3$.
- (c) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{C}$, $f : z \mapsto \bar{z}$.
- (d) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $V = W = \mathbb{C}$, $f : z \mapsto \bar{z}$.
- (e) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}[x]$, $p(x) \mapsto p(x - 1)$.
- (f) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}[x]$, $p(x) \mapsto p(x) - 1$.
- (g) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}[x]$, $p(x) \mapsto p(x) - x \cdot p(1)$.
- (h) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}[x]$, $p(x) \mapsto x^2 \cdot p(x)$.