Aufgabe 54. Skizziere das Bild des geschlossenen Polygonzugs $(0,0)$–$(2,0)$–$(2,2)$–$(1,3)$–$(0,2)$–$(0,0)$ unter den linearen Abbildungen f und g, die durch die folgenden Werte eindeutig (warum?) festgelegt sind:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 & \qquad g(e_1+e_2) &= 2e_1 \\ f(e_2) &= e_1+e_2 & \qquad g(e_1-e_2) &= 2e_2 \end{aligned}$$

Ändert sich der Flächeninhalt der Figur?

Aufgabe 55. Zeige, daß die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad\qquad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ x-y \\ -x+y \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x-y+z \\ -x+y+z \\ -z \end{bmatrix}$$

linear sind und berechne Basen von Kern und Bild der Abbildungen f, g und $g \circ f$.

Aufgabe 56. Konstruiere, wenn möglich, jeweils ein Beispiel für lineare Abbildungen $f \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, die die folgenden Eigenschaften erfüllten, und begründe widrigenfalls, warum es kein Beispiel geben kann:

(a) f hat keinen Fixpunkt.
(b) f ist bijektiv und hat genau einen Fixpunkt.
(c) f hat genau 2 Fixpunkte.
(d) $f \neq \mathrm{id}$ und f hat mehr als einen Fixpunkt.

Aufgabe 57. (a) Sei $V = U \dot{+} W$ eine direkte Summe und $\pi_U : V \to V$. Zeige, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi_U : V &\to V \\ v &\mapsto u \end{aligned}$$

linear ist, wobei $v = u + w$ die eindeutige Zerlegung eines Vektors $v \in V$ in die Komponenten $u \in U$ und $w \in W$ bezeichnet.

(b) Bestimme $\ker \pi_U$ und $\operatorname{im} \pi_U$.
(c) Eine Abbildung $f : V \to V$ heißt *Projektionsabbildung*, wenn es eine Zerlegung $V = U \dot{+} W$ gibt, sodaß $f = \pi_U$. Zeige, daß $f : V \to V$ eine Projektionsabbildung ist genau dann, wenn f idempotent ist, d.h., $f \circ f = f$.

Aufgabe 58. Seien U, V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$ sowie $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Zeige, daß

$$\dim \ker(g \circ f) \leq \dim \ker f + \dim \ker g.$$

Hinweis: Berechne Kern und Bild der linearen Abbildung $h = f\,|_{\ker g\circ f} \to V$.