Aufgabe 59. Berechne alle möglichen paarweisen Produkte der Matrizen (auch mit sich selbst):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 60. Die Potenzen einer Matrix sind definiert durch $A^0 = I$ sowie $A^n = A \cdot A^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Hinweis: Zunächst $n = 1, 2, 3$ ausrechnen, dann die allgemeine Lösung erraten und durch Induktion beweisen.

Aufgabe 61. Zwei $n \times n$-Matrizen A und B *kommutieren* miteinander, wenn $AB = BA$. Für eine gegebene Matrix A bezeichnen wir mit

$$\{A\}' := \{B \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid AB = BA\}$$

die Menge aller Matrizen, die mit ihr kommutieren.

(a) Zeige: Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ kommutiert mit allen Matrizen $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ genau dann, wenn $A = \lambda I_n$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$. *Hinweis:* Betrachte die Elementarmatrizen E_{ij}.

(b) Zeige, daß für eine fixe Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Menge $\{A\}'$ eine Teilalgebra von $\mathbb{K}_{n \times n}$ bildet. Das ist ein Unterraum, der bezüglich der Matrixmultiplikation abgeschlossen ist, d.h.,

$$B \in \{A\}' \wedge C \in \{A\}' \implies B \cdot C \in \{A\}'.$$

(c) Bestimme $\{A\}'$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 62. Bestimme die Matrix S_α der linearen Abbildung, die die Vektoren des $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $\{t \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ spiegelt. Berechne die Matrix $S_\alpha \cdot S_\beta$ und interpretiere die entsprechende lineare Abbildung geometrisch.

Aufgabe 63. Sei $(v_1, v_2, \ldots, v_k) \in \mathbb{R}^n$ eine Familie von gegebenen Vektoren. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume von $\mathbb{K}^{m \times n}$?

(a) $\{A \in \mathbb{K}^{m \times n} \mid v_i \in \ker f_A \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$.

(b) $\{A \in \mathbb{K}^{m \times n} \mid \mathcal{L}(\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}) = \ker f_A\}$.

(c) $\{A \in \mathbb{K}^{m \times n} \mid \mathcal{L}(\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}) \subseteq \ker f_A\}$.

(d) Berechne die Mengen (a), (b), (c) für die Werte $k = 2$, $m = 2$, $n = 3$ und die Vektoren $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$.