Aufgabe 64. Sei V ein Vektorraum $F : V \to V$ eine lineare Abbildung. Wir bezeichnen mit F^k die k-fache Hintereinanderausführung $\underbrace{F \circ F \circ \cdots \circ F}_{k\times}$. Sei $v \in V$ ein Vektor mit der Eigenschaft, daß $F^{n-1}(v) \neq 0$ ist aber $F^n(v) = 0$. Zeige, daß $\{v, F(v), F^2(v), \ldots, F^{n-1}(v)\}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 65. Zeige, daß die unteren Dreiecksmatrizen eine Teilalgebra der $n\times n$-Matrizen bilden; d.h., daß Linearkombinationen und Produkte von unteren Dreiecksmatrizen wieder untere Dreiecksmatrizen sind.

Aufgabe 66. (a) Bringe die Matrix

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 7 & 9 & 12 \\ -1 & 1 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

in möglichst wenigen Schritten auf die Form $I_{4,5}^{(r)}$ und bestimme Matrizen P und Q sodaß $PAQ = I_{3,4}^{(r)}$.

(b) Bestimme jeweils eine Basis für den Spaltenraum und den Zeilenraum.

Aufgabe 67. Invertiere die Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

über $\mathbb{Z}_5$.