**Aufgabe 1.** Von einem Parallelogramm seien die Punkte $A = (5,2)$, $B = (3,1)$, $C = (1,2)$ gegeben. Bestimme die Koordinaten des vierten Punkts.

**Aufgabe 2.** Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 10\,\xi & + & 4\,\eta & + & 3\,\zeta & = & 15 \\ -2\,\xi & + & \eta & - & \zeta & = & 1 \\ -3\,\xi & - & \eta & - & \zeta & = & -4 \end{array}.$$

Welche geometrische Interpretation hat die Lösung?

**Aufgabe 3.** Begründe, für welche Werte des Parameters $\delta$ das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} x & + & (1-\delta)\,y & = & 1 \\ (1+\delta)\,x & + & y & = & 1 \end{array}$$

in den Unbekannten $x$, $y$ lösbar ist und bestimme ggf. die Lösungsmenge.

**Aufgabe 4.** Sei $g = \{(1,2) + \lambda(3,4) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $E = \{(\xi,\eta,\zeta) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi - \eta + \zeta = 3\}$.

(a) Bestimme reelle Zahlen $a$, $b$, $c$, sodaß $g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a\,x + b\,y = c\}$.

(b) Bestimme Vektoren $v_0$, $v_1$, $v_2$ des $\mathbb{R}^3$, sodaß $E = \{v_0 + \lambda\,v_1 + \mu\,v_2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

**Aufgabe 5.** Formuliere die Negation (=das logische Gegenteil) der folgenden Aussagen:

(a) Jeder Student besucht mindestens eine Vorlesung.

(b) Kein Student besucht alle Vorlesungen.

(c) Jeder Student besucht genau eine Vorlesung.

(d) Die Flasche ist leer.

(e) In der Nacht sind alle Katzen grau.

(f) Wer Sorgen hat, hat auch Likör.

(g) Essen und Trinken verboten.

**Aufgabe 6.** Gib die folgenden Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente an:

(a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x^2 = 4\}$
(b) $B = \{x \mid -3 \leq x < 2 \text{ und } x \in \mathbb{Z}\}$
(c) $C = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x^2 + (3 - \pi)x - 3\pi = 0\}$
(d) $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ und } x^2 + (3 - \pi)x - 3\pi = 0\}$
(e) $E = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ und } x^2 + (3 - \pi)x - 3\pi = 0\}$

**Aufgabe 7.** Überprüfe, welche der folgenden Aussagen wahr sind:

(a) $\emptyset \subseteq \emptyset$
(b) $\emptyset \in \emptyset$
(c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
(d) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
(e) $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\{\}\}\})$
(f) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\{\}\}\})$

**Aufgabe 8.** Sei $M$ eine Menge und $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(g) $M \in \mathcal{P}(M)$ (h) $M \subseteq \mathcal{P}(M)$ (i) $\{M\} \in \mathcal{P}(M)$ (j) $\{M\} \subseteq \mathcal{P}(M)$

**Aufgabe 9.** Bestimme $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

**Aufgabe 10.** Seien $A$, $B$ und $C$ Mengen. Welche der folgenden Schlüsse sind zulässig?

(a) Angenommen, alle Elemente von B sind Element von A, kein Element von C ist Element von B; dann gilt: kein Element von C ist Element von A.
(b) Angenommen, kein Element von B ist Element von A, alle Elemente von C sind Elemente von B; dann gilt: kein Element von C ist Element von A.

**Aufgabe 11.** Formalisiere folgende Aussagen mittels Aussagenlogik.

(a) Von $A$, $B$ und $C$ gelten genau zwei.
(b) Von $A$, $B$ und $C$ gilt mindestens eines.
(c) Von $A$, $B$ und $C$ gilt genau eines.

**Aufgabe 12.** Seien $X$, $Y$ nichtleere Mengen, $P(x)$ und $Q(x, y)$ Prädikate und $A$ eine Aussage.

(a) Zeige, daß
$$A \to \forall x \in X : P(x) \iff \forall x \in X : A \to P(x).$$
(b) Zeige anhand eines Beispiels, daß die Aussagen
$$\exists x \in X \forall y \in Y : Q(x, y) \text{ und } \forall y \in Y \exists x \in X : Q(x, y)$$
im Allgemeinen nicht äquivalent sind. Welche der beiden Aussagen ist stärker, d.h., impliziert die andere?

**Aufgabe 13.** Gegeben sei die Mengenfamilie $(A_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ mit $A_i = \{-i, -i+1, \ldots, i-1, i\} \subseteq \mathbb{Z}$. Bestimme die Mengen
$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} A_i \qquad \bigcap_{i\in\mathbb{N}_0} A_i \qquad \bigcup_{i\in 2\mathbb{N}-1} A_i \qquad \bigcap_{i\in 2\mathbb{N}-1} A_i$$
wobei $2\mathbb{N} - 1 = \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, \ldots\}$ die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen bezeichnet.

**Aufgabe 14.** Überprüfe die folgenden Relationen auf die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie, Transitivität, Äquivalenzrelation, Ordnungsrelation, Totalordnung und bestimme ggf. die Äquivalenzklassen.

(a) $X = \mathcal{P}(Y)$, wobei $Y$ eine fixe Menge ist, Relation $xRy :\iff x \supseteq y$.
(b) $X = \mathbb{N}$, Relation: $mRn \iff \mathrm{ggT}(m, n) \neq 1$.
(c) $X = \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$ eine fixe Zahl, Relation: $mRn :\iff \exists k \in \mathbb{Z} : m - n = k \cdot d$.
(d) $A$ beliebig, $X = \mathcal{P}(A)$ und $R = \{(U, V) \mid U, V \subseteq A \text{ mit } |U| = |V|\} \subseteq X \times X$.

**Aufgabe 15.** Sei $X = \{1, 2, 3, 4\}$ und $S = \{(1, 2), (3, 2)\} \subseteq X \times X$. Bestimme die kleinste Äquivalenzrelation auf $X$, die $S$ umfaßt und gib die zugehörigen Äquivalenzklassen an.

**Aufgabe 16.** Untersuche, ob die folgenden Relationen Äquivalenzrelationen sind und bestimme ggf. die Äquivalenzklassen.
(a) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, Relation $(a,b)R(c,d) :\iff ad = bc$
(b) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, Relation $(a,b)R(c,d) :\iff ad = bc$

**Aufgabe 17.** Eine Partition einer Menge $X$ wurde definiert als eine Teilmenge $Z \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ mit den Eigenschaften

$$\bigcup_{A \in Z} A = X \qquad \text{und} \qquad \forall A, B \in Z : (A \neq B \implies A \cap B = \emptyset) \tag{0.1}$$

(a) Zeige, daß eine Teilmenge $Z \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Partition ist genau dann, wenn gilt

$$\forall x \in X \exists! A \in Z : x \in A$$

(b) Sei $Z \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X})$ eine Partition einer Menge $X$. Zeige, daß durch

$$x \sim y :\iff \exists A \in Z : x \in A \wedge y \in A$$

eine Äquivalenzrelation auf $X$ definiert wird mit der Eigenschaft, daß $X/_\sim = Z$.

**Aufgabe 18.** Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen. Zeige oder widerlege:
1. $g \circ f$ surjektiv $\implies$ $f$ surjektiv
2. $g \circ f$ surjektiv $\implies$ $g$ surjektiv
3. $g \circ f$ injektiv $\implies$ $f$ injektiv
4. $g \circ f$ injektiv $\implies$ $g$ injektiv

**Aufgabe 19.** Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeige oder widerlege:
(a) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ für alle $A, B \subseteq X$.
(b) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$ für alle $A, B \subseteq Y$.
(c) Wenn eine der obigen Gleichheiten nicht gilt, zeige, daß zumindest eine Teilmengenrelation ($\subseteq$ oder $\supseteq$) gilt.
(d) Ändert sich etwas an den Aussagen, wenn $f$ als injektiv oder surjektiv vorausgesetzt wird?

**Aufgabe 20.** Untersuche die folgenden linearen Gleichungssysteme mittels Gauß-Jordan-Elimination auf Lösbarkeit und bestimme, wenn möglich, alle Lösungen:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & & & - & 2x_3 & - & 4x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & = & 2 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & & & - & 2x_3 & - & 4x_4 & = & -1 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 5x_4 & = & -5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & = & 5 \end{array}$$

*Hinweis:* Beide Systeme können simultan behandelt werden.

**Aufgabe 21.** Für welche Werte von $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} -3\,x_1 & - & 3\,x_2 & + & \alpha\,x_3 & = & \beta \\ -x_1 & - & 2\,x_2 & - & \alpha\,x_3 & = & -2 \\ 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & 3 \end{array}$$

keine/eine eindeutige/unendlich viele Lösungen?

**Aufgabe 22.** Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= 1 \\ x_3 - x_2 &= 1 \\ &\vdots \\ x_n - x_{n-1} &= 1 \\ \alpha\,x_n + x_1 &= \beta \end{aligned}$$

keine/eine eindeutige/unendlich viele Lösungen?

**Aufgabe 23.** Zeige mittels Vektorrechnung, daß die Schwerlinien eines Dreiecks (auch *Seitenhalbierende* genannt) einander in einem Punkt schneiden und bestimme diesen Punkt.

**Aufgabe 24.** Welche der folgenden Strukturen $(X, \circ)$ sind Halbgruppen, Monoide, Gruppen? Bestimme ggf. neutrale, invertierbare und inverse Elemente und untersuche, ob die Verknüpfungen kommutativ sind.

(a) $X = \mathbb{N}_0$, Verknüpfung $a \circ b = \mathrm{ggT}(a, b)$, wobei $\mathrm{ggT}(0, 0) := 0$ definiert sein soll.

(b) $X = \{a, b, c\}$, Verknüpfungstabelle

| $\circ$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $c$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $a$ |

(c) $X = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, Verknüpfung $(a, b) \circ (c, d) = (a + bc, bd)$

**Aufgabe 25.** Zeige, daß $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ mit der Verknüpfung

$$a \circ b := a + b + ab$$

eine Gruppe ist. Löse in $G$ die Gleichung

$$5 \circ x \circ 6 = 17$$

**Aufgabe 26.** Sei $(G, \circ)$ eine Halbgruppe. Wir betrachten folgende Eigenschaften:

(i) $\exists e \in G \forall a \in G : e \circ a = a$
(ii) $\forall a \in G \exists b \in G : a \circ b = e$
(iii) $\forall a \in G \exists b \in G \forall c \in G : a \circ b \circ c = c$

(a) Zeige, daß (i)$\wedge$(ii) $\iff$ (iii).
(b) Finde ein Beispiel einer Halbgruppe, die die Eigenschaften (i)–(iii) aufweist, aber keine Gruppe ist.

**Aufgabe 27.** Erstelle die Verknüpfungstafel der Symmetriegruppe eines Quadrats $ABCD$ und Stelle die Elemente als Permutationen der Eckpunkte dar.

**Aufgabe 28.** Erstelle die Verknüpfungstafel der multiplikativen Halbgruppe $(\mathbb{Z}_9^*, \cdot)$ und bestimme alle invertierbaren Elemente.

**Aufgabe 29.** Bestimme alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ der Gleichungen

(a) $$12x \equiv 4 \mod 16$$

(b) $$12x \equiv 6 \mod 16$$

(c) $$4x + 5 \equiv 3 \mod 7$$

(d) $$4x + 7 \equiv 4 \mod 9$$

**Aufgabe 30.** Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeige, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} f : G &\to G \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

bijektiv ist und daß $f$ ein Automorphismus ist genau dann, wenn $G$ abelsch ist.

**Aufgabe 31.** Zeige, daß $\mathbb{R}^2$ mit den Operationen

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$
$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) := (a_1 b_1, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

einen kommutativen Ring bildet und bestimme Einselement, Nullteiler und invertierbare Elemente.

**Aufgabe 32.** Wir betrachten $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ mit den Verknüpfungen

$$a \oplus b = \max(a, b) \qquad a \odot b = a + b$$

(a) Welche Ringaxiome sind erfüllt? Welches Element muß hinzugefügt werden, um ein neutrales Element bezüglich der Addition $\oplus$ zu erhalten?
(b) Löse das “lineare” Gleichungssystem

$$((-1) \odot x) \oplus (\epsilon \odot y) = 1$$
$$((-2) \odot x) \oplus (0 \odot y) = 1$$

wobei $\epsilon$ das unter (a) gefundene neutrale Element bezüglich Addition bezeichnet.

**Aufgabe 33.** Skizziere die folgenden Mengen in der komplexen Ebene:
(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} < 1 + z + \bar{z}\}$.
(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z^2) \leq 4\}$.

**Aufgabe 34.** Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 4\,z & = & 1 \\ 2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 2 \\ x & + & 3\,y & + & 2\,z & = & 3 \end{array}$$

über dem Körper $\mathbb{Z}_7$.

**Aufgabe 35.** Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & i\,y & + & i\,z & = & -1+i \\ (1-2i)\,x & - & (1+2i)\,y & + & (1-i)\,z & = & 2-i \\ -x & + & (-1+i)\,y & - & z & = & -1-i \end{array}$$

über dem Körper der komplexen Zahlen.

**Aufgabe 36.** Welche der folgenden Strukturen sind Vektorräume?

(a) $V = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ mit den üblichen Operationen.
(b) $V = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mit den üblichen Operationen.
(c) $V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f(x) = 0$ bis auf endlich viele $x\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mit den üblichen Operationen $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$.
(d) $V = \{f : \mathbb{R} \to [0,1] \mid f(x) = 0$ bis auf endlich viele $x\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, Operationen wie in Punkt (c).
(e) $V = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mit den Operationen

$$a \oplus b := \sqrt[3]{a^3 + b^3} \qquad \lambda \odot a := \sqrt[3]{\lambda} \cdot a.$$

**Aufgabe 37.** Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $n$ und $\mathbb{Z}_2$ der Restklassenkörper modulo 2. Wir erklären die Skalarmultiplication $\odot : \mathbb{Z}_2 \times G \to G$ durch $0 \odot g := n$, $1 \odot g := g$.

(a) Welche Bedingung muß die Gruppe $G$ erfüllen, damit $G$ mit diesen Operationen ein Vektorraum über $\mathbb{Z}_2$ ist?
(b) Gib jeweils Beispiele von Gruppen, die diese Eigenschaft haben bzw. nicht haben.

**Aufgabe 38.** Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume des Vektorraums $\mathbb{R}^3$?

(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \leq 0\}$
(b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_2 = 0\}$
(c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3\}$
(d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = x_3\}$
(e) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \neq x_3\}$
(f) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i = 0$ für mindestens ein $i \in \{1, 2, 3\}\}$

**Aufgabe 39.** Sei $U$ der Unterraum von $\mathbb{R}^4$, der von den Vektoren

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$

aufgespannt wird.

(a) Bestimme eine Basis von $U$.
(b) Erweitere diese Basis zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

**Aufgabe 40.** Bestimme alle linear abhängigen Teilfamilien der Familie

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

im Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

**Aufgabe 41.** Stelle fest für welche Werte von $t$ die Familie

$$\left( \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2t \\ t \end{bmatrix} \right)$$

linear unabhängig in $\mathbb{K}^3$ ist, wenn

(a) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.
(b) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$.

**Aufgabe 42.** Sei $V$ ein endlich erzeugter Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $A \subseteq V$ eine Teilmenge (nicht unbedingt endlich), sodaß $V = L(A)$. Zeige, daß man eine endliche Teilmenge $B \subseteq A$ auswählen kann, die eine Basis von $V$ bildet.
*Hinweis*: Konstruiere zunächst eine endliche Teilmenge von $A$, die den Vektorraum erzeugt.

**Aufgabe 43.** Sei $V$ ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$.
Zeige oder widerlege: Eine Familie $(v_1, v_2, v_3)$ von Vektoren ist linear unabhängig genau dann, wenn die Familie $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3)$ linear unabhängig ist.

**Lineare Algebra I (NAWI)** **WS2017/2018** **Übungsblatt №10**
13.12.2017

**Aufgabe 44.** Sei $V$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit Basis $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ und seien $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ Vektoren mit eindeutigen Darstellungen $v_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} b_j$. Zeige: $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ is linear unabhängig genau dann, wenn die Menge der Koordinatenvektoren

$$\{(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1n}), (\lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2n}), \dots, (\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kn})\}$$

linear unabhängig in $\mathbb{K}^n$ ist.

**Aufgabe 45.** Wir betrachten die folgenden Unterräume des $\mathbb{R}^4$:

$$U = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}\right), \quad W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} 3\,x_1 - 5\,x_2 + 2\,x_4 = 0 \\ -x_1 - 3\,x_2 + 4\,x_3 = 0 \end{matrix} \right\}.$$

Berechne Basen $B_U$, $B_W$, $B_{U\cap W}$ und $B_{U+W}$ der Räume $U$, $W$, $U \cap W$, $U + W$, sodaß die folgenden Relationen erfüllt sind:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & B_U \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & \\ B_{U\cap W} \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & B_{U+W} \\ & B_W \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & \end{tikzcd}$$

und stelle fest, in welchen dieser Räume der Vektor $\begin{bmatrix} 0, -1, 0, -4 \end{bmatrix}$ enthalten ist.

**Aufgabe 46.** Gib drei Untervektorräume $U$, $V$ und $W$ des $\mathbb{R}^2$ an, sodaß zwar $U \cap V = \{0\}$, $V \cap W = \{0\}$ und $U \cap W = \{0\}$, aber $U + V + W$ keine direkte Summe ist.

**Aufgabe 47.** Sei $V$ ein Vektorraum und $U_i \subseteq V$ Unterräume.

(a) Zeige:
$$(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \subseteq U_1 \cap (U_2 + U_3)$$
(b) Gib ein Beispiel, in dem Gleichheit nicht gilt.
(c) Zeige: Wenn $U_2$ in $U_1$ enthalten ist, dann gilt Gleichheit.

**Aufgabe 48.** Sei $V$ ein endlichdimensionaler Vektorraum und $U_1, U_2, \dots, U_r \subseteq V$ Unterräume, sodaß $V = U_1 + U_2 + \dots U_r$. Zeige:

$$V = U_1 \dot{+} U_2 \dot{+} \cdots \dot{+} U_r \iff \dim V = \dim U_1 + \dim U_2 + \cdots + \dim U_r$$

**Aufgabe 49.** Sei $V$ ein Vektorraum der Dimension $n$ and seien $U$ und $W$ zwei verschiedene Unterräume der Dimension $n-1$. Zeige, daß $\dim(U \cap W) = n - 2$.

**Aufgabe 50.** Sei $V$ ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ mit $|\mathbb{K}| \geq 3$. Zeige: Eine nichtleere Teilmenge $M \subseteq V$ ist genau dann eine lineare Mannigfaltigkeit, wenn gilt

$$\bigwedge_{a,b \in M} \bigwedge_{\lambda \in \mathbb{K}} \lambda a + (1-\lambda) b \in M$$

**Aufgabe 51.** Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ betrachten wir den Unterraum

$$U = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}\right)$$

(a) Bestimme ein Repräsentantensystem $S$ für den Faktorraum $V_{/U}$, das zugleich ein Unterraum von $V$ ist.
(b) Welche der folgenden Abbildungen von $V_{/U}$ nach $\mathbb{R}$ ist wohldefiniert?

$$f([x]_U) = x_1 + x_2 + x_3$$
$$g([x]_U) = x_1 - x_2 - x_3$$

**Aufgabe 52.** Sei $V = \mathbb{R}[x]$ und $U = \{f \in V \mid f(0) = 0\}$.
(a) Zeige, daß $U$ einen Unterraum von $V$ bildet.
(b) Bestimme für $f \in V$ die lineare Mannigfaltigkeit $f + U$.
(c) Bestimme eine Basis des Faktorraums $V_{/U}$.

**Aufgabe 53.** Welche der folgenden Abbildungen $V \to W$ sind linear?
(a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$, $f : (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.
(b) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{Z}_3^2$, $W = \mathbb{Z}_3$, $f : (x_1, x_2) \mapsto x_1^3 + x_2^3$.
(c) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{C}$, $f : z \mapsto \bar{z}$.
(d) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $V = W = \mathbb{C}$, $f : z \mapsto \bar{z}$.
(e) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}[x]$, $p(x) \mapsto p(x-1)$.
(f) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}[x]$, $p(x) \mapsto p(x) - 1$.
(g) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}[x]$, $p(x) \mapsto p(x) - x \cdot p(1)$.
(h) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}[x]$, $p(x) \mapsto x^2 \cdot p(x)$.

**Aufgabe 54.** Skizziere das Bild des geschlossenen Polygonzugs $(0,0)$–$(2,0)$–$(2,2)$–$(1,3)$–$(0,2)$–$(0,0)$ unter den linearen Abbildungen $f$ und $g$, die durch die folgenden Werte eindeutig (warum?) festgelegt sind:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 & \qquad g(e_1+e_2) &= 2e_1 \\ f(e_2) &= e_1+e_2 & \qquad g(e_1-e_2) &= 2e_2 \end{aligned}$$

Ändert sich der Flächeninhalt der Figur?

**Aufgabe 55.** Zeige, daß die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad\qquad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ x-y \\ -x+y \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x-y+z \\ -x+y+z \\ -z \end{bmatrix}$$

linear sind und berechne Basen von Kern und Bild der Abbildungen $f$, $g$ und $g \circ f$.

**Aufgabe 56.** Konstruiere, wenn möglich, jeweils ein Beispiel für lineare Abbildungen $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, die die folgenden Eigenschaften erfüllten, und begründe widrigenfalls, warum es kein Beispiel geben kann:

(a) $f$ hat keinen Fixpunkt.
(b) $f$ ist bijektiv und hat genau einen Fixpunkt.
(c) $f$ hat genau 2 Fixpunkte.
(d) $f \neq \mathrm{id}$ und $f$ hat mehr als einen Fixpunkt.

**Aufgabe 57.** (a) Sei $V = U \dot{+} W$ eine direkte Summe und $\pi_U : V \to V$. Zeige, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi_U : V &\to V \\ v &\mapsto u \end{aligned}$$

linear ist, wobei $v = u + w$ die eindeutige Zerlegung eines Vektors $v \in V$ in die Komponenten $u \in U$ und $w \in W$ bezeichnet.

(b) Bestimme $\ker \pi_U$ und $\operatorname{im} \pi_U$.
(c) Eine Abbildung $f : V \to V$ heißt *Projektionsabbildung*, wenn es eine Zerlegung $V = U \dot{+} W$ gibt, sodaß $f = \pi_U$. Zeige, daß $f : V \to V$ eine Projektionsabbildung ist genau dann, wenn $f$ idempotent ist, d.h., $f \circ f = f$.

**Aufgabe 58.** Seien $U$, $V$ und $W$ Vektorräume über $\mathbb{K}$ sowie $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Zeige, daß

$$\dim \ker(g \circ f) \leq \dim \ker f + \dim \ker g.$$

*Hinweis*: Berechne Kern und Bild der linearen Abbildung $h = f\,|_{\ker g \circ f} \to V$.

**Aufgabe 59.** Berechne alle möglichen paarweisen Produkte der Matrizen (auch mit sich selbst):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 60.** Die Potenzen einer Matrix sind definiert durch $A^0 = I$ sowie $A^n = A \cdot A^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
*Hinweis*: Zunächst $n = 1, 2, 3$ ausrechnen, dann die allgemeine Lösung erraten und durch Induktion beweisen.

**Aufgabe 61.** Zwei $n \times n$-Matrizen $A$ und $B$ *kommutieren* miteinander, wenn $AB = BA$. Für eine gegebene Matrix $A$ bezeichnen wir mit

$$\{A\}' := \{B \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid AB = BA\}$$

die Menge aller Matrizen, die mit ihr kommutieren.

(a) Zeige: Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ kommutiert mit allen Matrizen $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ genau dann, wenn $A = \lambda I_n$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$. *Hinweis:* Betrachte die Elementarmatrizen $E_{ij}$.

(b) Zeige, daß für eine fixe Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Menge $\{A\}'$ eine Teilalgebra von $\mathbb{K}_{n\times n}$ bildet. Das ist ein Unterraum, der bezüglich der Matrixmultiplikation abgeschlossen ist, d.h.,

$$B \in \{A\}' \land C \in \{A\}' \implies B \cdot C \in \{A\}'.$$

(c) Bestimme $\{A\}'$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 62.** Bestimme die Matrix $S_\alpha$ der linearen Abbildung, die die Vektoren des $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $\{t \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ spiegelt. Berechne die Matrix $S_\alpha \cdot S_\beta$ und interpretiere die entsprechende lineare Abbildung geometrisch.

**Aufgabe 63.** Sei $(v_1, v_2, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^n$ eine Familie von gegebenen Vektoren. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume von $\mathbb{K}^{m\times n}$?

(a) $\{A \in \mathbb{K}^{m\times n} \mid v_i \in \ker f_A \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$.

(b) $\{A \in \mathbb{K}^{m\times n} \mid \mathcal{L}(\{v_1, v_2, \dots, v_k\}) = \ker f_A\}$.

(c) $\{A \in \mathbb{K}^{m\times n} \mid \mathcal{L}(\{v_1, v_2, \dots, v_k\}) \subseteq \ker f_A\}$.

(d) Berechne die Mengen (a), (b), (c) für die Werte $k = 2$, $m = 2$, $n = 3$ und die Vektoren $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$.

**Aufgabe 64.** Sei $V$ ein Vektorraum $F : V \to V$ eine lineare Abbildung. Wir bezeichnen mit $F^k$ die $k$-fache Hintereinanderausführung $\underbrace{F \circ F \circ \cdots \circ F}_{k\times}$. Sei $v \in V$ ein Vektor mit der Eigenschaft, daß $F^{n-1}(v) \neq 0$ ist aber $F^n(v) = 0$. Zeige, daß $\{v, F(v), F^2(v), \ldots, F^{n-1}(v)\}$ linear unabhängig sind.

**Aufgabe 65.** Zeige, daß die unteren Dreiecksmatrizen eine Teilalgebra der $n\times n$-Matrizen bilden; d.h., daß Linearkombinationen und Produkte von unteren Dreiecksmatrizen wieder untere Dreiecksmatrizen sind.

**Aufgabe 66.** (a) Bringe die Matrix

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 7 & 9 & 12 \\ -1 & 1 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

in möglichst wenigen Schritten auf die Form $I_{4,5}^{(r)}$ und bestimme Matrizen $P$ und $Q$ sodaß $PAQ = I_{3,4}^{(r)}$.

(b) Bestimme jeweils eine Basis für den Spaltenraum und den Zeilenraum.

**Aufgabe 67.** Invertiere die Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

über $\mathbb{Z}_5$.