3. Übungsblatt zu **Lineare Algebra 1** (NAWI) – WS 2019/20

11.) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} 3\,x & + & 2\,y & = & 1 \\ 2\,x & + & 6\,y & = & 3 \end{array}$$

(a) über den reellen Zahlen,
(b) über den ganzen Zahlen modulo 7.
(c) Was ändert sich in (b), wenn die 6 in der zweiten Gleichung durch 5 ersetzt wird?

12.) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & i\,y & + & i\,z & = & -1+i \\ (1-2i)x & - & (1+2i)y & + & (1-i)z & = & 2-i \\ -\,x & - & (1-i)y & - & z & = & -1-i \end{array}$$

über den komplexen Zahlen.

13.) Zeigen Sie die folgenden Rechenregeln für komplexe Zahlen z, z_1, z_2:
(a) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
(b) $z + \overline{z} = 2\ \mathrm{Re}(z)$
(c) $z - \overline{z} = 2i\ \mathrm{Im}(z)$
(d) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
(e) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
(f) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
(g) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

14.) Sei $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ die Menge der komplexen Zahlen mit Betrag 1 und sei $z_0 \in \mathbb{T}$. Zeigen Sie:
(a) $(\mathbb{T}, \cdot\,)$ ist eine Gruppe, wobei $\cdot$ die Standardmultiplikation in $\mathbb{C}$ bezeichnet.
(b) $(\{z_0^n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}, \cdot\,)$ ist eine Gruppe. Diese Gruppe ist endlich genau dann, wenn ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $z_0^N = 1$.

15.) Stellen Sie fest, ob die folgenden Operationen kommutativ/assoziativ sind. Welche der folgenden Paare $(G, \circ\,)$ bilden Gruppen? Bestimmen Sie gegebenenfalls neutrale und inverse Elemente.
(a) $G = \mathbb{R},\ x \circ y = \max(x, y)$
(b) $G = \mathbb{R},\ x \circ y = x + y + 1$
(c) $G = \mathbb{R},\ x \circ y = x + y + xy$