4. Übungsblatt zu **Lineare Algebra 1** (NAWI) – WS 2019/20

16.) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow f$ surjektiv
(b) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv
(c) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv
(d) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow g$ injektiv

17.) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.
Das *Bild von* $A \subseteq X$ *unter* f ist $f(A) := \{f(x) : x \in A\} \subseteq Y$.
Das *Urbild von* $B \subseteq Y$ *unter* f ist $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$.

Überprüfen Sie, ob die folgenden Eigenschaften für allgemeine $f : X \to Y$ gelten:

(a) $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$ für alle $A, A' \subseteq X$
(b) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ für alle $A, A' \subseteq X$
(c) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ für alle $B, B' \subseteq Y$
(d) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ für alle $B, B' \subseteq Y$

18.) Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper. Folgern Sie für alle $x, y \in \mathbb{K}$ die folgenden Eigenschaften aus den Körperaxiomen:

(a) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$
(b) $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_{\mathbb{K}}$
(c) $x \cdot y = 0_{\mathbb{K}} \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{K}} \vee y = 0_{\mathbb{K}}$.

19.) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe der Ordnung N mit neutralem Element e.

(a) Zeigen Sie: Für jedes $x \in G$ existiert eine ganze Zahl n mit $1 \leq n \leq N$ sodass

$$x^n = \underbrace{x \circ x \circ \cdots \circ x}_{n \text{ Stück}} = e.$$

Die kleinste solche Zahl n wird als *Ordnung von* x *in* G bezeichnet.
(Hinweis: Betrachten Sie die Elemente $x^0 (= e), x^1, \ldots, x^N$. Wie viele davon können verschieden sein?)

(b) Bestimmen Sie die Ordnung aller Elemente der symmetrischen Gruppe S_3.

20.) (a) Bestimmen Sie das multiplikative Inverse von $k = 40$ und $k = 50$ in $\mathbb{Z}_{83}$
(b) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem in $\mathbb{Z}_{83}$:

$$\begin{array}{rcrcr} 40\,x & + & 10\,y & = & 11 \\ 9\,x & - & 21\,y & = & 2 \end{array}$$