5. Übungsblatt zu **Lineare Algebra 1** (NAWI) – WS 2019/20

21.) Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit den Operationen $\oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', 0)$$

$$\lambda \odot (x, y) = (\lambda x, 0)$$

Welche Vektorraumaxiome sind erfüllt? Ist $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$?

22.) Welche der folgenden Mengen bilden mit den üblichen Operationen $+$ und $\cdot$ Unterräume des $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$?
(a) $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$
(b) $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 1\}$
(c) $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 2x_2\}$
(d) $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 x_2 = 0\}$
(e) $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n\}$

23.) Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraums $(\mathbb{R}^\mathbb{R}, +, \cdot)$ aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?
(a) $\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} : f(0) = 1\}$
(b) $\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} : f(0) + f(1) = f(2)\}$
(c) $\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} : \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ gilt } f(x) = f(-x)\}$
(d) $\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} : \exists\, C > 0 \text{ sodass } f(x) = 0 \text{ für alle } x \text{ mit } |x| > C\}$

Für die folgenden zwei Aufgaben sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$.
Eine *lineare Mannigfaltigkeit* (auch: *affiner Unterraum* von V) ist eine Menge der Form

$$\mathcal{L} = a + U = \{a + b : b \in U\},$$

wobei $a \in V$ ein Vektor und $U \subseteq V$ ein Unterraum von V ist.

24.) Zeigen Sie (ohne Verwendung von Aufgabe 25), dass die folgenden 2 Aussagen äquivalent sind:
(i) $\mathcal{L} \subseteq V$ ist eine lineare Mannigfaltigkeit.
(ii) $\exists\, a \in \mathcal{L} : \ \forall\, b_1, b_2 \in \mathcal{L},\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ gilt: $a + \lambda_1(b_1 - a) + \lambda_2(b_2 - a) \in \mathcal{L}$.

25.) (a) Sei $a \in V$ und $U \subseteq V$ ein Unterraum von V. Zeigen Sie für die lineare Mannigfaltigkeit $\mathcal{L} = a + U$ und jedes $a' \in V$:

$$a' \in \mathcal{L} \iff \mathcal{L} = a' + U$$

(b) Folgern Sie, dass die folgenden 2 Aussagen äquivalent sind:
(i) $\mathcal{L} \subseteq V$ ist eine lineare Mannigfaltigkeit.
(ii) $\forall\, a \in \mathcal{L} : \ \forall\, b_1, b_2 \in \mathcal{L},\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ gilt: $a + \lambda_1(b_1 - a) + \lambda_2(b_2 - a) \in \mathcal{L}$.