6. Übungsblatt zu **Lineare Algebra 1** (NAWI) – WS 2019/20

26.) Seien U_1, U_2 Unterräume des Vektorraums V. Zeigen oder widerlegen Sie:
(a) $U_1 \cap U_2$ ist ein Unterraum von V.
(b) $U_1 \cup U_2$ ist ein Unterraum von V.
(c) $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ ist ein Unterraum von V.

27.) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $a, b, c \in V$ drei linear unabhängige Vektoren. Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen linear unabhängig sind:
(a) $\{a + b,\ b + c,\ c + a\}$
(b) $\{a - b,\ c - b,\ c - a\}$
(c) $\{a,\ a - b,\ a + b - c\}$

28.) Bestimmen Sie, ob die folgenden Mengen von Vektoren des Vektorraums V linear unabhängig sind, wenn
(a) $V = \mathbb{R}^4$ (über $\mathbb{R}$)
(b) $V = \mathbb{Z}_5^4$ (über $\mathbb{Z}_5$)

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\4\\2\end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\4\\2\end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix}2\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\4\\4\end{pmatrix} \right\}$$

29.) Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und sei $A_1, A_2, A_3, \ldots$ eine unendliche Folge linear unabhängiger Teilmengen $A_i \subseteq V$, sodass $A_i \subseteq A_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass auch die Vereinigung $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ eine linear unabhängige Teilmenge von V ist.

30.) Gegeben seien die Unterräume U_1 und U_2 des $\mathbb{R}^4$ als lineare Hüllen

$$U_1 = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\4\\-3\\5\end{pmatrix} \right\} \right), \quad U_2 = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix}2\\1\\-3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\7\\15\\13\end{pmatrix} \right\} \right)$$

Bestimmen Sie eine Basis von (a) $U_1 \cap U_2$ und (b) $U_1 + U_2$