# 7. Übungsblatt zu **Lineare Algebra 1** (NAWI) – WS 2019/20

---

31.) Seien $U_1$, $U_2$, $U_3$ Unterräume des Vektorraums $V$. Zeigen Sie:
(a) $(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \subseteq U_1 \cap (U_2 + U_3)$
(b) Im Allgemeinen gilt keine Gleichheit in (a).
(c) Wenn $U_2 \subseteq U_1$, dann gilt Gleichheit in (a).

32.) Sei $V$ ein endlichdimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie:
(a) Für jede linear unabhängige Teilmenge $A \subseteq V$ gilt $|A| \leq dim(V)$.
(b) Jede linear unabhängige Teilmenge $A \subseteq V$ mit $|A| = dim(V)$ ist eine Basis.
(c) Für jeden Unterraum $U \subseteq V$ gilt $dim(U) \leq dim(V)$.
(d) Für jeden Unterraum $U \subseteq V$ mit $dim(U) = dim(V)$ gilt $U = V$.

33.) Gegeben sind die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^4$:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Zeige, dass $\mathbb{R}^4$ von $M_1$ erzeugt wird und dass $M_2$ linear unabhängig ist. Ergänze $M_2$ durch Hinzunahme von Elementen aus $M_1$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

34.) Sei $M = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem eines Vektorraums $V$.
Zeigen Sie: $M$ ist eine Basis von $V$ genau dann, wenn *mindestens* ein Vektor $v \in V$ eine *eindeutige* Darstellung als Linearkombination von Vektoren in $M$ hat.

35.) Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit Basis $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ und seien $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ Vektoren mit (eindeutigen) Darstellungen $v_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} b_j$.
Zeigen Sie: $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ist linear unabhängig genau dann, wenn die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \vdots \\ \lambda_{1n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \\ \vdots \\ \lambda_{2n} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \lambda_{k1} \\ \lambda_{k2} \\ \vdots \\ \lambda_{kn} \end{pmatrix} \right\}$$

linear unabhängig in $\mathbb{K}^n$ ist.