8. Übungsblatt zu **Lineare Algebra 1** (NAWI) – WS 2019/20

36.) Seien U, W Unterräume eines Vektorraums V und $x, y \in V$. Weiters seien $X = x + U$ und $Y = y + W$ lineare Mannigfaltigkeiten in V.
Zeigen Sie, dass entweder $X \cap Y = \emptyset$ oder $X \cap Y = z + U \cap W$ für ein $z \in V$.

37.) Sei der Unterraum U des Vektorraums $\mathbb{R}^4$ abhängig vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$U = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1-a \\ 2+a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 2 \\ 1-3a \end{pmatrix}\right\}\right).$$

Bestimmen Sie die Dimension von U abhängig von a.

38.) Sei V ein Vektorraum der Dimension $dim(V) = n \in \mathbb{N}$ und seien U_1, U_2 Unterräume von V. Zeigen Sie:

(a) Wenn $U_1 \neq U_2$ und $dim(U_1) = dim(U_2) = n - 1$, dann gilt $dim(U_1 \cap U_2) = n - 2$.
(b) Wenn $dim(U_1) + dim(U_2) > n$, dann ist die Summe $U_1 + U_2$ keine *direkte* Summe von Unterräumen.

39.) Seien U_1 und U_2 Unterräume des Vektorraums $\mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$U_1 = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right), \quad U_2 = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}\right).$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 + U_2$.
(b) Finden Sie einen Unterraum W von $\mathbb{R}^4$, sodass $U_1 \oplus W = U_2 \oplus W = \mathbb{R}^4$ gilt (direkte Summe).

40.) Sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (über $\mathbb{R}$). Zeigen Sie, dass

$$U_+ = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}, \quad U_- = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(x) = -f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

Unterräume von V sind und dass $V = U_+ \oplus U_-$ (direkte Summe).