10. Übungsblatt zu **Lineare Algebra 1** (NAWI) – WS 2019/20

43.) Sei der Vektorraum $V = U_1 \oplus U_2$ direkte Summe seiner beiden Unterräume U_1 und U_2. Dann lässt sich jeder Vektor $v \in V$ eindeutig als $v = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ schreiben. Seien $P_1 : V \to U_1$ und $P_2 : V \to U_2$ Abbildungen, sodass für jedes $v \in V$

$$v = P_1(v) + P_2(v).$$

Zeigen Sie, dass P_1 und P_2 lineare Abbildungen sind.

44.) Berechnen Sie alle möglichen paarweisen Produkte der folgenden Matrizen mit reellen Einträgen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

45.) Die Potenzen einer Matrix sind definiert durch $A^0 = I$ sowie $A^n = A \cdot A^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Hinweis: Berechnen Sie zuerst für kleine Werte von n um eine Lösung für allgemeines n zu finden und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

46.) Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle linearen Abbildungen $F : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_2$ mit $F(v_j) = w_j$ für $j \in \{1, 2, 3\}$ sowie deren Matrixdarstellung bezüglich der Standardbasen in $\mathbb{R}_3$ und $\mathbb{R}_2$.

47.) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

genau dann bijektiv ist, wenn $ad - bc \neq 0$.