12. Übungsblatt zu **Lineare Algebra 1** (NAWI) – WS 2019/20

53.) Invertieren Sie die Matrix
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$
über $\mathbb{Z}_5$, den ganzen Zahlen modulo 5.

54.) Sei V ein Vektorraum und $f : V \to V$ eine *nilpotente* lineare Abbildung, d.h., es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $f^k = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $id_V - f$ invertierbar ist mit $(id_V - f)^{-1} = id_V + f + f^2 + \cdots + f^{k-1}$, wobei $id_V : V \to V, x \mapsto x$ die Identitätsabbildung auf V bezeichnet.

(b) Verwenden Sie (a), um die Inverse der Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
zu bestimmen.

55.) Bestimmen Sie eine linke Dreiecksmatrix L und eine rechte Dreiecksmatrix R, sodass $A = LR$ für
$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 10 & 7 & 6 \\ 15 & 0 & -10 \end{pmatrix} \qquad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

56.) (a) Zeigen Sie, dass die Mengen
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
Basen des $\mathbb{R}_3$ bilden.

(b) Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren $\phi_B(v)$ und $\phi_C(v)$ des Vektors $v = (1, 2, 3)^T$ des $\mathbb{R}_3$ bezüglich der geordneten Basen B und C.

(c) Gegeben sei der Vektor $w \in \mathbb{R}_3$ durch seinen Koordinatenvektor $\phi_B(w) = (-2, 1, 4)^T$ bezüglich der geordneten Basis B. Bestimmen Sie den Koordinatenvektor $\phi_C(w)$ von w bezüglich der geordneten Basis C.

57.) Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen $\Phi_{B,C}(f_1)$ und $\Phi_{B,C}(f_2)$ der linearen Abbildungen $f_1, f_2 : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_3$ gegeben durch

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x, \qquad f_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot x$$

bezüglich der geordneten Basen

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}_2 \quad \text{und} \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}_3.$$