13. Übungsblatt zu **Lineare Algebra 1** (NAWI) – WS 2019/20

58.) Bestimmen Sie die Matrix S_α der linearen Abbildung, die Vektoren des $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $\{t \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ spiegelt. Berechnen Sie das Matrixprodukt $T = S_\alpha S_\beta$ und interpretieren Sie die lineare Abbildung zur Matrix T geometrisch.

59.) Bestimmen Sie eine Permutationsmatrix P sowie je eine linke und eine rechte Dreiecksmatrix L und R, sodass $A = PLR$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die folgenden Aufgaben sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ eine n+1-elementige Teilmenge von $\mathbb{K}$.

60.) Zeigen Sie, dass die folgende Matrix vollen Rang hat.

$$\begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{pmatrix}$$

Hinweis: Bringen Sie die Matrix durch Zeilen- und Spaltenumformungen in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & t_1 & \cdots & t_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 1 & t_n & \cdots & t_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

und verwenden sie Induktion.

61.) Zeigen Sie (unter Verwendung von Aufgabe 60), dass für jedes S mit $T \subseteq S \subseteq \mathbb{K}$ die $n+1$ Abbildungen $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n$ gegeben durch $\pi_i : S \to \mathbb{K}, x \mapsto x^i$ linear unabhängig im Vektorraum $\mathbb{K}^S$ (über $\mathbb{K}$) aller Abbildungen von S nach $\mathbb{K}$ sind.

62.) Sei nun $\mathbb{K} = S = \mathbb{R}$ und sei $U_n = \mathcal{L}(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)$ der von den Abbildungen $\pi_0, \ldots, \pi_n$ aus Aufgabe 61 aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}^\mathbb{R}$. Weiters seien n+1 Abbildungen $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ definiert durch $\nu_0(x) = 1$ und $\nu_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1}(x - j)$ für $i > 0$.
(a) Zeigen Sie: $B_n = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)$ und $C_n = (\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n)$ sind Basen von U_n
(b) Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrix T_{B_3,C_3} des Koordinatenwechsels von B_3 nach C_3, sodass $\phi_{C_3}(v) = T_{B_3,C_3} \cdot \phi_{B_3}(v)$ für alle $v \in U_3$.