14. Übungsblatt zu **Lineare Algebra 1** (NAWI) – WS 2019/20

63.) Gegeben seien die Basis $B = \{(3,1,1)^T, (0,0,1)^T, (-1,2,0)^T\}$ des $\mathbb{R}_3$. Bestimmen Sie die Basis C des $\mathbb{R}_3$, sodass die Basiswechselmatrix $W_{B,C}$ (die Matrix mit $\phi_C = W_{B,C}\phi_B$) gegeben ist durch

$$W_{B,C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1/3 & 2/3 & 4 \\ 1/3 & -1/3 & -1 \end{pmatrix}.$$

64.) Bestimmen Sie die duale Basis B^* zur Basis B des $\mathbb{R}_3$ gegeben durch

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

65.) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und V^* sein Dualraum.

Zeigen Sie: $E \subseteq V$ ist ein Erzeugendensystem von V genau dann, wenn für alle $w^* \in V^*$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$(\forall v \in E : w^*(v) = 0) \implies w^* = 0.$$

Seien V und W Vektorräume, V^* und W^* ihre Dualräume und sei $f \in \mathcal{L}(V,W)$ eine lineare Abbildung von V nach W. Die zu f *transponierte Abbildung* f^T ist definiert durch

$$f^T : W^* \to V^*, \quad w^* \mapsto w^* \circ f.$$

66.) Seien V und W Vektorräume und sei $f \in \mathcal{L}(V,W)$.

Zeigen Sie, dass die zu f transponierte Abbildung linear ist, also $f^T \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$ gilt.

67.) Seien nun V und W endlichdimensionale Vektorräume mit Basen B und C und seien B^* und C^* die zu B und C dualen Basen der Dualräume V^* und W^*. Weiters sei $f \in \mathcal{L}(V,W)$ und sei $\Phi_{B,C}(f)$ die Abbildungsmatrix von f bezüglich der Basen B und C.

Zeigen Sie, dass die Abbildungsmatrix der transponierten Abbildung $f^T \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$ bezüglich der Basen C^* und B^* die transponierte Matrix der Abbildungsmatrix von f bezüglich der Basen B und C ist, also $\Phi_{C^*,B^*}(f^T) = \Phi_{B,C}(f)^T$ gilt.