

**Aufgabe 16**

Stellen Sie jeweils für die gegebenen Vektoren  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  im  $\mathbb{R}^3$  fest, ob diese linear unabhängig sind. Drücken Sie andernfalls einen Vektor als Linearkombination der beiden anderen Vektoren aus.

(a)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix};$$

(b)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

(c)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 17**

Es seien  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  Vektoren im  $\mathbb{R}^3$ . Untersuchen Sie die folgenden beiden Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt.

- (a) Sind  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  linear unabhängig, so sind sie auch paarweise linear unabhängig.<sup>1</sup>  
 (b) Sind  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  paarweise linear unabhängig, so sind sie linear unabhängig.

**Aufgabe 18**

Es seien  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  Vektoren im  $\mathbb{R}^d$  (mit  $d \in \{2, 3\}$ ). Zeigen Sie:

- (a)  $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| \Leftrightarrow (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \perp (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ .  
 (b) ist  $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$  und  $\mathbf{w} \neq \mathbf{o}$ , so gilt

$$\left\| \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} - \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2} \right\| = \frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|}.$$

*Zusatz:* Interpretieren Sie (a) für  $\mathbb{R}^2$  geometrisch.

**Aufgabe 19**

Es sei  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ . Es seien weiters  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  zwei linear unabhängige Vektoren im  $\mathbb{R}^3$ . Beweisen Sie, dass es ein  $i \in \{1, 2, 3\}$  gibt, so dass  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}_i$  linear unabhängig sind.

**Aufgabe 20**

Für welche  $\lambda \in \mathbb{R}$  sind die Vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

<sup>1</sup>Man sagt, die Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  sind *paarweise linear unabhängig*, wenn für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \neq j$  die Vektoren  $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$  linear unabhängig sind.