Lineare Algebra 1 (NAWI) – WS 2020/21

Übungsblatt 05 – 04.11.2020

Aufgabe 21
a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^d$ eine Basis bilden:

i) $d = 2, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, ii) $d = 3, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

iii) $d = 3, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$,

iv) $d = 3, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b) Gegeben ist der Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ in Koordinaten bezüglich der Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ und Vektoren

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie fest, dass $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist und ermitteln Sie gleichzeitig die Koordinaten von $\mathbf{x}$ bezüglich dieser Basis.

Aufgabe 22
Sei $g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 3x + 4y = 5 \right\}$ eine Gerade in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $\|\overrightarrow{OP}\| \geq 1$ für jeden Punkt $P \in g$ gilt. Bestimmen Sie einen Punkt $Q \in g$ so, dass $\|\overrightarrow{OQ}\| = 1$.

Aufgabe 23
a) Sei $g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, ax + by = c \right\}$ eine Gerade in $\mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass der Vektor $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ orthogonal zu g ist.
b) Zeigen Sie: Zwei Gleichungen

$$ax + by = c \quad \text{ und } \quad a'x + b'y = c'$$

beschreiben genau dann die gleiche Gerade in $\mathbb{R}^2$, wenn es ein $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt, so dass

$$(a', b', c') = \mu \cdot (a, b, c).$$

Aufgabe 24 (Satz 3.5.b in VO)
Sei $(\mathcal{P}, V)$ ein affiner Raum der Dimension 3. Weiters sei $P \in \mathcal{P}$ und V_2 ein zweidimensionaler reeller Vektorraum von Vektoren in V. Beweisen Sie, dass es genau eine Ebene E mit $P \in E$ und $V_E = V_2$ gibt, nämlich

$$E = \{X \in \mathcal{P} \mid \overrightarrow{PX} \in V_2\}.$$

Aufgabe 25
Es seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ zwei Vektoren in $\mathbb{R}^d$ mit $d \in \{2, 3\}$ und $\mathbf{w} = \|\mathbf{b}\|\,\mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|\,\mathbf{b}$. Zeigen Sie mit Hilfe des inneren Produkts, dass $\mathbf{w}$ den Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ halbiert.