Lineare Algebra 1 (NAWI) – WS 2020/21

Übungsblatt 06 – 11.11.2020

Aufgabe 26 (a) Sind die vier Punkte $P_1, \ldots, P_4$ mit folgenden affinen Koordinaten komplanar? Bestimmen Sie gegebenfalls eine Ebene welche die Punkte enthält.

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OP_3} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OP_4} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}.$$

(b) Finden Sie vier *nicht*-kollineare Punkte $Q_1, \ldots, Q_4$ in der Ebene für die gilt: es gibt $\alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in \mathbb{R}$, nicht sämtliche verschwindend, mit

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \overrightarrow{OQ_i} = 0.$$

Aufgabe 27
Es seien P, P', Q, Q' die Ecken eines Vierecks $PQQ'P'$. Beweisen Sie, dass dieses Viereck genau dann ein Parallelogram ist, wenn sich seine Diagonalen halbieren, d.h., es gilt

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{OQ} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{QP'}.$$

Aufgabe 28
Es seien

$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \qquad g_2 = \left\{ \begin{pmatrix}-5\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}0\\5\\-4\end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie einen Vektor $\mathbf{n}$, der normal auf g_1 und g_2 steht.

(b) Bestimmen Sie den Abstand zwischen den beiden Geraden g_1 und g_2, d.h., bestimmen Sie $\min\{\|\overrightarrow{PQ}\| : P \in g_1, Q \in g_2\}$.

Aufgabe 29
Es seien A, B, C die Eckpunkte eines Dreiecks ABC. Der *Schwerpunkt* von ABC ist nach Definition der Punkt S mit Ortsvektor $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Zeigen Sie:

(a) Je zwei Seitenhalbierende sind nicht parallel.

(b) S ist der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden.

(c) Es gilt $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = o$.

Aufgabe 30 (a) Bestimmen Sie eine Ebene, die den Punkt mit affinen Koordinaten $(1, -1, 3)$ sowie die Gerade

$$g = \left\{ \begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-5\\1\\2\end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

enthält. Gibt es mehrere Möglichkeiten?

(b) Gibt es eine Ebene, welche die folgenden beiden Geraden enthält? Falls ja, bestimmen Sie die Ebene.

$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \qquad g_2 = \left\{ \begin{pmatrix}-2\\-1\\8\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-5\\1\\2\end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$