Lineare Algebra 1 (NAWI) – WS 2020/21

Übungsblatt 07 – 18.11.2020

Aufgabe 31
Stellen Sie fest, ob die folgenden Verknüpfungen kommutativ/assoziativ sind. Welche der folgenden Paare $(G, *)$ bilden Gruppen? Bestimmen Sie gegebenenfalls neutrale und inverse Elemente.

(a) $G = \mathbb{R}$, $x * y = \min(x, y)$,

(b) $G = \mathbb{R}$, $x * y = x + y - 1$,

(c) $G = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $x * y = x + y + xy$.

Aufgabe 32
(a) Sei $(G, *)$ eine Gruppe mit $a * a = e$ für alle $a \in G$, wobei e das neutrale Element von G bezeichnet. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

(b) Sei $(G, *)$ eine Gruppe mit endlich vielen Elementen und neutralem Element e. Zeigen Sie, dass es zu jedem $a \in G$ ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gibt, für das gilt $e = a^n := \underbrace{a * a * \cdots * a}_{\text{n-mal}}$.

Aufgabe 33
Betrachten Sie $F = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ mit den entsprechenden Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ in $\mathbb{R}$. Welche Körperaxiome sind erfüllt? Ist $(F, +, \cdot)$ ein Körper?

Aufgabe 34
Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme

$$(a)\quad \begin{array}{ccccccc} x & + & \overline{2}y & & & = & \overline{4} \\ \overline{3}x & + & y & + & z & = & \overline{0} \\ x & + & y & + & \overline{2}z & = & \overline{3} \end{array} \qquad\qquad (b)\quad \begin{array}{ccccccc} & & \overline{2}y & + & \overline{2}z & = & \overline{1} \\ \overline{2}x & + & y & & & = & \overline{1} \\ \overline{4}x & + & \overline{2}y & & & = & \overline{2} \end{array}$$

über dem Körper $\mathbb{Z}_5$.

Aufgabe 35
Es sei V eine nicht-leere Menge mit innerer Verknüpfung $+$ und neutralem Element 0.

a) Zeigen Sie: Ist V ein Vektorraum über $\mathbb{Z}_2$, so gilt für alle $v \in V : v + v = 0$.

b) Es sei $(V, +)$ eine abelsche Gruppe mit $v + v = 0$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass es genau eine Möglichkeit gibt, $(V, +)$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{Z}_2$ zu machen.