Lineare Algebra 1 (NAWI) – WS 2020/21

Übungsblatt 08 – 02.12.2020

Aufgabe 36
Welche der folgenden Mengen sind Unterräume der angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräume?

(a) $A = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 3x_2,\ x_3 = -x_1 \} \subseteq \mathbb{R}^3$.
(b) $B = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 0 \} \subseteq \mathbb{R}^2$.
(c) $C = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2^2 = 0 \} \subseteq \mathbb{R}^2$.
(d) $D = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq x_2 \} \subseteq \mathbb{R}^3$.
(e) $E = \{ (t, t^3) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^2$.
(f) $F = \{ (t, t+s) \in \mathbb{R}^2 : s, t \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 37
Bestimmen Sie Basen von $[M] + [N]$ und $[M] \cap [N]$, für

$$M = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4 \quad \text{und} \quad N = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Aufgabe 38
Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\mathcal{A} := \mathrm{Abb}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) := \{ f \mid f : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \}$ sei die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{K}$ nach $\mathbb{K}$. Für f, $g \in \mathcal{A}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ seien $f + g \in \mathcal{A}$ und $\lambda f \in \mathcal{A}$ definiert durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{K}.$$

Für $M \subseteq \mathbb{K}$ sei $\mathcal{A}_M := \{ f \in \mathcal{A} \mid f(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{K} \setminus M \}$. Zeigen Sie:

(a) Mit den gegebenen Operationen ist $\mathcal{A}$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.
(b) Für alle $M \subseteq \mathbb{K}$ ist $\mathcal{A}_M$ ein Unterraum von $\mathcal{A}$.
(c) Für M, $N \subseteq \mathbb{K}$ gilt $\mathcal{A}_{M \cap N} = \mathcal{A}_M \cap \mathcal{A}_N$ und $\mathcal{A}_{M \cup N} = \mathcal{A}_M + \mathcal{A}_N$.

Für welche M, $N \subseteq \mathbb{K}$ gilt $\mathcal{A} = \mathcal{A}_M \oplus \mathcal{A}_N$?

Aufgabe 39
Beweisen Sie Lemma 4.37 aus der Vorlesung: Es sei V ein Vektorraum.

(a) Ein einziges Element $a \in V$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $a \neq o$ ist.
(b) $a_1, \ldots, a_n \in V$, $n \geq 2$, sind genau dann linear abhängig, wenn für mindestens ein k, $1 \leq k \leq n$, gilt:

$$a_k = \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} \lambda_i a_i \quad \text{mit} \quad \lambda_i \in \mathbb{K}.$$

Aufgabe 40
Stellen Sie für folgende Mengen fest, ob diese als Teilmengen von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (definiert wie in Aufgabe 38) linear unabhängig sind.

(a) $\{ f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{R},\ f_a(x) = x + a \}$.
(b) $\{ g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N},\ g_n(x) = x^2 + 2nx + n^2 \}$.
(c) $\left\{ h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N},\ h_n(x) = \frac{1}{n+x^2} \right\}$.