Lineare Algebra 1 (NAWI) – WS 2020/21

Übungsblatt 09 – 09.12.2020

Aufgabe 41
Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V sei ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit $\dim V = n < \infty$, A sei eine linear unabhängige Teilmenge von V und U sei ein Unterraum von V. Zeigen Sie:

(a) Jede nicht leere Teilmenge von A ist wieder linear unabhängig.
(b) A ist genau dann Basis von V, wenn A aus n Elementen besteht.
(c) Wenn $\dim(U) = \dim(V)$, dann gilt $U = V$.

Aufgabe 42
Sei

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3-a \\ 0 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1+a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von $U = [u_1, u_2, u_3, u_4] \subseteq \mathbb{R}^4$ abhängig von $a \in \mathbb{R}$. Für die Fälle, in denen $\dim U < 4$ ist, ergänzen Sie die gegebenen Vektoren zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 43
Sei V ein Vektorraum und seien U, W Unterräume von V, sodass $\dim(U+W) = \dim(U \cap W)+1$. Zeigen Sie, dass genau eine der Bedingungen $U \subseteq W$ und $W \subseteq U$ erfüllt ist.

Aufgabe 44
Bestimmen Sie, welche der folgenden Abbildungen $\varphi : X \to Y$ linear sind:

(a) $X = Y = \mathbb{R}$, $\varphi(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$,
(b) $X = \mathbb{R}^3, Y = \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (2x - y + z, -x + 2z)$,
(c) $X = Y = \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y) = (|x|, 2y)$.

Berechnen Sie Bild, Kern, Rang und Defekt der linearen Abbildungen.

Aufgabe 45
(a) Sei V ein Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie

$$\varphi(V) \cap \ker \varphi = \{o\} \Longleftrightarrow \ker \varphi^2 = \ker \varphi,$$

wobei $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$, d.h., $\varphi^2(v) = (\varphi \circ \varphi)(v) = \varphi(\varphi(v))$ für $v \in V$.

(b) Seien U, V Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $L : U \to V$ eine lineare Abbildung. Weiters sei $b \in V$ gegeben und $x_0 \in U$ eine Lösung der Gleichung

$$L(x) = b. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass $\{x_0 + w \,|\, w \in \ker L\}$ die Menge aller Lösungen der Gleichung (1) ist. Geben Sie eine hinreichende Bedingung für L an, so dass es genau ein $x \in V$ gibt, das (1) löst.