## Lineare Algebra 1 (NAWI) – WS 2020/21

## Übungsblatt 10 – 16.12.2020

---

**Aufgabe 46**

Es sei $0 \neq a \in \mathbb{R}^2$. Überprüfen Sie, dass folgende Abbildungen linear sind, bestimmen Sie Kern und Bild, und interpretieren Sie die Abbildungen geometrisch.

(a) $p_a \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ v \mapsto v - \frac{\langle a,v\rangle}{\|a\|^2} a.$

(b) $s_a \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ v \mapsto v - 2\frac{\langle a,v\rangle}{\|a\|^2} a.$

**Aufgabe 47**

Es sei $\psi \colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen $V$ und $W$. Beweisen Sie: Die Abbildung $\psi$ ist genau dann injektiv, wenn für jede Menge $M \subseteq V$ gilt: Ist $M$ linear unabhängig, so ist auch $\psi(M)$ linear unabhängig.

**Aufgabe 48**

Es sei $V$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $B$. Durch Einschränkung der Skalarmultiplikation ist $V$ auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Beweisen Sie, dass $B \cup \{\, \mathrm{i}b \mid b \in B \,\}$ eine Basis von $V$ über $\mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die komplexe Konjugation

$$\begin{cases} \mathbb{C} & \to \mathbb{C} \\ z = a + \mathrm{i}b & \mapsto \overline{z} = a - \mathrm{i}b \end{cases} \qquad (a,\, b \in \mathbb{R})$$

als Abbildung linear über $\mathbb{R}$, aber nicht über $\mathbb{C}$, ist.

(c) Bestimmen Sie Basen von

$$L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) = \{\, \varphi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid \varphi \text{ ist } \mathbb{C}\text{-linear} \,\}$$

und von

$$L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) = \{\, \varphi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid \varphi \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear} \,\}.$$

**Aufgabe 49**

Es sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{R}$. Mit der komponentenweisen Addition

$$(a_n)_{n\geq 0} + (b_n)_{n\geq 0} \coloneqq (a_n + b_n)_{n\geq 0} \qquad (a_n,\, b_n \in \mathbb{R})$$

und der Skalarmultiplikation

$$c(a_n)_{n\geq 0} \coloneqq (ca_n)_{n\geq 0} \qquad (c,\, a_n \in \mathbb{R})$$

ist $\mathcal{F}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Die Abbildungen $l,\, r \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ seien definiert durch

$$l\big((a_n)_{n\geq 0}\big) \coloneqq (a_{n+1})_{n\geq 0} \qquad \text{und} \qquad r\big((a_n)_{n\geq 0}\big) \coloneqq (a_{n-1})_{n\geq 0},$$

wobei wir in der Definition von $r$ stets $a_{-1} = 0$ setzen. Beweisen Sie:

(a) $l$ ist eine lineare Abbildung, die surjektiv aber nicht injektiv ist.

(b) $r$ ist eine lineare Abbildung, die injektiv aber nicht surjektiv ist.

**Aufgabe 50**

Es sei $V$ ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass für $v_1, \ldots, v_n \in V$ $(n \geq 1)$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

(ii) Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ existiert eine lineare Abbildung $\varphi_i \colon V \to \mathbb{K}$ mit $\varphi_i(v_i) = 1$ und $\varphi_i(v_j) = 0$ für $j \neq i$.

*Zusatz:* Warum sind die Aussagen im Allgemeinen nicht äquivalent zu: „Die Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist linear unabhängig"?