Lineare Algebra 1 (NAWI) – WS 2020/21

Übungsblatt 11 – 13.01.2021

Aufgabe 51
Seien X, Y, Z Vektorräume über $\mathbb{K}$, $\varphi \in L(X,Y)$ und $\psi \in L(Y,Z)$. Beweisen Sie:
a) $\psi \circ \varphi \in L(X,Z)$.

b) Wenn φ bijektiv ist, dann $\varphi^{-1} \in L(Y,X)$.

Aufgabe 52
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und φ ein Endomorphismus von V.
a) Sei $v \in V$, so dass für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\varphi^n(v) \neq 0 \quad \text{und} \quad \varphi^{n+1}(v) = 0.$$

Beweisen Sie, dass $v, \varphi(v), \dots, \varphi^n(v)$ linear unabhängig sind.

b) Sei $\varphi = \varphi \circ \varphi$. Zeigen Sie, dass $V = \ker(\varphi) \oplus \operatorname{im}(\varphi)$ (direkte Summe) gilt.

Aufgabe 53
a) Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \ \varphi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}, \ \varphi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}?$$

b) Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\11\end{pmatrix}, \ \varphi\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\2\end{pmatrix}, \ \varphi\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\2\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\varphi((-1,8,3)^T)$.

Aufgabe 54
Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\varphi\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\y+z\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ von φ bezüglich der Basen

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe 55
Sei φ eine lineare Abbildung $\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ und

$$A = M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix}1 & \lambda & 0 & 1\\ -\lambda & 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1\end{pmatrix},$$

wobei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von $\mathbb{C}^4$ ist. Bestimmen Sie den Rang von φ in Abhängigkeit vom Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$.