Lineare Algebra 1 (NAWI) – WS 2020/21

Übungsblatt 12 – 20.1.2021

Aufgabe 56
Es sei $\mathbb{R}_2[x]$ der Vektorraum der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2. [1] Ferner sei $\frac{d}{dx}\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ die (formale) Ableitung, d.h., $\frac{d}{dx}(a_2x^2 + a_1x + a_0) = 2a_2x + a_1$ für a_0, a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Matrix $M(\frac{d}{dx}; \mathcal{B}_i, \mathcal{B}_i)$ für folgende Basen:

(a) $\mathcal{B}_1 = (1, x, x^2)$,
(b) $\mathcal{B}_2 = ((x-1)^2, x^2, (x+1)^2)$.

Aufgabe 57
Es sei V ein 2-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $T\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Weiters sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V und

$$M(T; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{mit } a,\, b,\, c,\, d \in K.$$

Zeigen Sie, dass T genau dann bijektiv ist, wenn gilt $ad - bc \neq 0$.

Aufgabe 58
Bestimmen Sie alle Polynomfunktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad 3, für die gilt: $f(1) = 0$, $f(-1) = 1$ und $f'(2) = -1$.

Aufgabe 59
Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K, und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind (für $1 \leq k \leq n$).

(a) Es existiert ein k-dimensionaler Unterraum $W \subseteq V$ mit $\varphi(W) \subseteq W$.
(b) Es existiert eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass die Einträge der links unteren $(n-k) \times k$-Teilmatrix von $M(\varphi; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ gleich 0 sind. D.h., die Matrix hat die Struktur

$$M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{array}{r} k \left\{ \vphantom{\begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix}} \right. \\ n-k \left\{ \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \right. \\ \end{array} \!\!\begin{array}{c} \left(\begin{matrix} * & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{matrix} \right) \\ \underbrace{\hphantom{0 \;\dots\; 0}}_{k} \;\; \underbrace{\hphantom{* \;\dots\; *}}_{n-k} \end{array}.$$

Aufgabe 60
Bestimmen Sie den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

[1] $\mathbb{R}_2[x]$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}[x]$, vergleiche Beispiel 4.12 in Prof. Kappels Skriptum.