Lineare Algebra 1 (NAWI) – WS 2020/21

Übungsblatt 13 – 27.01.2021

Aufgabe 61
Betrachten Sie den Vektorraum V der reellen Funktionen mit der Basis $\mathcal{B} = (\sin(x), \cos(x))$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}' = (2\sin(x) + \cos(x), 3\cos(x))$ auch eine Basis von V ist. Bestimmen Sie $M(\mathrm{Id}, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ und $M(\mathrm{Id}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$. Mit Id bezeichnen wir die identische Abbildung $V \to V$, d.h., $\mathrm{Id}(v) = v$ für alle $v \in V$.

Aufgabe 62
Wir betrachten den Vektorraum $M_{2,2}(\mathbb{R})$ der rellen 2×2 Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von $M_{2,2}(\mathbb{R})$ ist.

(b) Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$, $A \mapsto MA$ linear ist.

(c) Bestimmen Sie $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

Aufgabe 63
Betrachten Sie die Menge

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : a - b + 2c = 0 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass W ein Unterraum des Vektorraums $M_{2,2}(\mathbb{R})$ ist und finden Sie eine Basis von W.

Aufgabe 64
Berechnen Sie alle möglichen paarweisen Produkte der folgenden Matrizen mit reellen Einträgen:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 65
Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Aussagen für allgemeine Matrizen $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ für $n \in \mathbb{N}$ gelten:

(a) Wenn $AB = 0$, dann $BA = 0$.

(b) Wenn $A, B \neq 0$, dann $AB \neq 0$.

(c) Wenn $AB + BA = 0$, dann $A^2B^3 = B^3A^2$.

(d) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.