Lösungen zum 1. Übungsblatt zu Lineare Algebra 1 (NAWI) – WS 2020/21

Aufgabe 1. Seien $p = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ und $q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 3 \right\}$ zwei Geraden in $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie

a) reelle Zahlen a, b, c, sodass $p = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c \right\}$,

b) Vektoren v_0, v_1 des Raumes $\mathbb{R}^2$, sodass $q = \{v_0 + tv_1 \mid t \in \mathbb{R}\}$,

c) den Schnitt der Geraden p und q.

Lösung: a) Es sei $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein beliebiger Punkt im $\mathbb{R}^2$. Dann gilt $u \in p$ genau dann, wenn $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ ein Element der Geraden $g = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist. Da ein Normalvektor dieser Gerade $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist, besteht g genau aus den Vektoren, die normal auf $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ stehen, d.h. aus genau den Vektoren $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ mit $z - w = 0$. Also gelten die Äquivalenzen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in p \iff \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \in g \iff x - 1 - (y-2) = 0 \iff x - y = -1.$$

Also ist

$$p = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = -1 \right\}.$$

b) Es ist

$$q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 3 - 2y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3-2y \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}.$$

c) Es sei $u = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2+t \end{pmatrix}$ ($t \in \mathbb{R}$) ein beliebiger Punkt in p. Dann gelten

$$u \in q \iff 1 + t + 2(2+t) = 3 \iff 3t = -2 \iff t = -\frac{2}{3}.$$

Es folgt

$$p \cap q = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{3} \\ 2 - \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 2. Seien

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 1 \right\} \quad \text{und} \quad E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

zwei Ebenen in $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie den Schnitt $E_1 \cap E_2$.

Lösung: Es sei

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+s+t \\ -1+s \\ 1+2s-t \end{pmatrix}$$

(s, $t \in \mathbb{R}$) ein beliebiger Punkt von E_2. Dann gilt

$$u \in E_1 \iff 3+s+t-1+s-(1+2s-t) = 1 \iff 2t+1 = 1 \iff t = 0.$$

Es folgt

$$E_1 \cap E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 3. Begründen Sie, für welche Werte des Parameters δ das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} x & + & \delta y & = & 1 \\ \delta x & + & y & = & -1 \end{array}$$

in den Unbekannten x, y lösbar ist und bestimmen Sie ggf. die Lösungsmenge.

Lösung. Wenn wir in einem Gleichungsystem ein Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen Gleichung addieren, erhalten wir ein Gleichungssystem, das die gleiche Lösungsmenge wie die ursprüngliche Gleichung hat, denn

$$\Big(x = a \quad \wedge \quad y = b\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(x = a \quad \wedge \quad \lambda a + y = \lambda a + b\Big) \quad \Rightarrow$$
$$\Big(x = a \quad \wedge \quad \lambda a + y = \lambda x + b\Big)$$

und

$$\Big(x = a \quad \wedge \quad \lambda x + y = \lambda a + b\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(x = a \quad \wedge \quad y = \lambda(a-x) + b\Big) \quad \Rightarrow$$
$$\Big(x = a \quad \wedge \quad y = b\Big).$$

Wir wenden dies nun auf unser Gleichungssystem an und addieren das $-\delta$–fache der ersten Gleichung zur zweiten Gleichung (und die erste Gleichung bleibt gleich) und erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} x & + & \delta y & = & 1 \\ & & y(1-\delta^2) & = & -(1+\delta) \end{array}$$

mit der gleichen Lösungsmenge.
Jetzt wollen wir natürlich durch $1-\delta^2 = (1-\delta)(1+\delta)$ dividieren, was bekanntlich nur dann erlaubt ist, wenn $1-\delta^2 \neq 0$, d.h. $\delta \neq \pm 1$, gilt. Wir müssen daher Fallunterscheidungen machen.
1.Fall $\delta \neq \pm 1$: dann können wir also dividieren und erhalten zunächst

$$y = -\frac{1+\delta}{(1-\delta)(1+\delta)} = -\frac{1}{1-\delta}$$

und dann

$$x = 1 - \delta y = 1 + \frac{\delta}{1-\delta} = \frac{1}{1-\delta}.$$

Also ist im Fall $\delta \neq \pm 1$

$$\left\{ \frac{1}{1-\delta} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

die Lösungsmenge unseres Gleichungssystem.

2.Fall $\delta = 1$: Dann haben wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ & & 0 & = & -2 \end{array},$$

das offensichtlich keine Lösung besitzt. Also ist im Fall $\delta = 1$ die Lösungsmenge die leere Menge.
3.Fall $\delta = -1$: Dann schaut unsere Gleichugnssystem so aus

$$\begin{array}{ccccc} x & - & y & = & 1 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$

(wir haben also eigentlich nur eine Gleichung). Wegen $x - y = 1 \iff x = 1 + y$, erhalten wir als Lösungsmenge im Fall $\delta = -1$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 4. Sei $a_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots 4$, $a, b \in \mathbb{R}$. Lösen Sie:

$$a) \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= a_1 \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 &= a_2 \\ x_1 \qquad + x_3 + x_4 &= a_3 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= a_4 \end{aligned} \qquad b) \quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 \qquad &= a \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad &= 0 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 \qquad &= 0 \\ &\vdots \\ -x_{n-2} + 2x_{n-1} - x_n &= 0 \\ -x_{n-1} + 2x_n &= b \end{aligned}$$

Lösung: a). Wir lösen dieses Gleichungssystem zunächst mit der Standardmethode (siehe Lösung zu Aufgabe 3). Wir versuchen also, das Gleichungssystem zu vereinfachen, in dem wir Vielfache einer Gleichung zu anderen addieren. Um Schreibarbeit zu vermeiden, machen wir folgende Beobachtung: wenn wir Vielfache einer Gleichung zu einer anderen addieren, ändern sich nur die Koeffizienten der Variablen und die rechten Seiten. Wir müssen daher nur diese Koeffizienten und die rechten Seiten im Auge haben. Damit starten wir mit

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & a_2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & a_3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a_4 \end{array}$$

und verändern wie folgt (dabei bedeute der Ausdruck $\lambda z_i + z_j$, dass wir das λ–fache der i–ten Zeile zur j–ten addieren)

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & a_2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & a_3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a_4 \end{array} \quad \xrightarrow{\substack{-z_1+z_2 \\ -z_1+z_3}} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -a_1 + a_2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -a_1 + a_3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a_4 \end{array} \quad \xrightarrow{1 \cdot z_3 + z_4}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -a_1 + a_2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -a_1 + a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -a_1 + a_3 + a_4 \end{array} \quad \xrightarrow{1 \cdot z_2 + z_4} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -a_1 + a_2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -a_1 + a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{array} \qquad (*)$$

Manch einer mag sich ja fragen, was dies bringen soll, da das vorläufige Ergebnis viel komplizierter ausschaut als der Startpunkt. Um zu sehen, was wir erreicht haben, schreiben wir unser vorläufiges Ergebnis wieder als gewöhnliches Gleichungssystem. Wir vertauschen dabei nur die zweite und die dritte Gleichung:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & a_1 \\ & & -x_2 & & & + & x_4 & = & -a_1+a_3 \\ & & & & -x_3 & + & x_4 & = & -a_1+a_2 \\ & & & & & & 3x_4 & = & -2a_1+a_2+a_3+a_4 \end{array}.$$

Nun könnnen wir die Vereinfachung sehen: wir könnten jetzt aus der vierten Gleichung x_4 berechnen, dann mit Hilfe der dritten Gleichung x_3 usw. Aber um Schreibarbeit (und auch Rechenarbeit) zu sparen, können wir bei $(*)$ wie am Anfang fortfahren ($\mu \cdot z_i$ bedeutet, dass wir die i–Zeile mit $\mu \neq 0$ multiplizieren; dies entspricht der Multiplikation der i–ten Gleichung mit $\mu \neq 0$, was die Lösungsmenge offenbar nicht ändert):

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -a_1+a_2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -a_1+a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2a_1+a_2+a_3+a_4 \end{array} \xrightarrow{\frac{1}{3}\cdot z_4} \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -a_1+a_2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -a_1+a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-2a_1+a_2+a_3+a_4}{3} \end{array} \xrightarrow[-z_4+z_2]{-z_4+z_3}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{-a_1+2a_2-a_3-a_4}{3} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{-a_1-a_2+2a_3-a_4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-2a_1+a_2+a_3+a_4}{3} \end{array} \xrightarrow{1\cdot z_2+z_1} \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{2a_1+2a_2-a_3-a_4}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{-a_1+2a_2-a_3-a_4}{3} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{-a_1-a_2+2a_3-a_4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-2a_1+a_2+a_3+a_4}{3} \end{array} \xrightarrow{1\cdot z_3+z_1}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_1+a_2+a_3-2a_4}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{-a_1+2a_2-a_3-a_4}{3} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{-a_1-a_2+2a_3-a_4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-2a_1+a_2+a_3+a_4}{3} \end{array} \xrightarrow[(-1)\cdot z_3]{(-1)\cdot z_2} \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_1+a_2+a_3-2a_4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{a_1-2a_2+a_3+a_4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a_1+a_2-2a_3+a_4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-2a_1+a_2+a_3+a_4}{3} \end{array}.$$

Wenn wir jetzt das Ergebnis wieder als Gleichungssystem schreiben erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} x_1 & = & \frac{a_1+a_2+a_3-2a_4}{3} \\ x_3 & = & \frac{a_1-2a_2+a_3+a_4}{3} \\ x_2 & = & \frac{a_1+a_2-2a_3+a_4}{3} \\ x_4 & = & \frac{-2a_1+a_2+a_3+a_4}{3} \end{array}.$$

Daher ist

$$\left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3-2a_4 \\ a_1+a_2-2a_3+a_4 \\ a_1-2a_2+a_3+a_4 \\ -2a_1+a_2+a_3+a_4 \end{pmatrix} \right\}$$

die Lösungsmenge unseres Gleichungssytems.

Wie in der Angabe angedeutet, gibt es für dieses spezielle Gleichungssystem eine einfachere Lösungsmöglichkeit. Wir setzen dazu $a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Addieren wir alle vier Gleichungen, so erhalten wir

$$3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = a,$$

also $x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{a}{3}$. Damit erhalten wir für alle $x_1,\ldots,x_4\in\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & a_1\\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & a_2\\ x_1 & + & & & x_3 & + & x_4 & = & a_3\\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & a_4 \end{array} \iff$$

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & a_1\\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & a_2\\ x_1 & + & & & x_3 & + & x_4 & = & a_3\\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & a_4\\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & \frac{a}{3} \end{array} \iff$$

$$\begin{array}{ccc} (x_1+x_2+x_3+x_4)-x_4 & = & a_1\\ (x_1+x_2+x_3+x_4)-x_3 & = & a_2\\ (x_1+x_2+x_3+x_4)-x_2 & = & a_3\\ (x_1+x_2+x_3+x_4)-x_1 & = & a_4\\ x_1+x_2+x_3+x_4 & = & \frac{a}{3} \end{array} \iff$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{a}{3}-x_4 & = & a_1\\ \frac{a}{3}-x_3 & = & a_2\\ \frac{a}{3}-x_2 & = & a_3\\ \frac{a}{3}-x_1 & = & a_4\\ x_1+x_2+x_3+x_4 & = & \frac{a}{3} \end{array} \iff$$

$$\begin{array}{ccc} x_4 & = & -a_1+\frac{a}{3}\\ x_3 & = & -a_2+\frac{a}{3}\\ x_2 & = & -a_3+\frac{a}{3}\\ x_1 & = & -a_4+\frac{a}{3}\\ x_1+x_2+x_3+x_4 & = & \frac{a}{3} \end{array}$$

Wegen

$$-a_1+\frac{a}{3}-a_2+\frac{a}{3}-a_3+\frac{a}{3}-a_4+\frac{a}{3}=-a+\frac{4}{3}a=\frac{a}{3}$$

ist

$$\begin{pmatrix}-a_4+\frac{a}{3}\\ -a_3+\frac{a}{3}\\ -a_2+\frac{a}{3}\\ -a_1+\frac{a}{3}\end{pmatrix}$$

die einzige Lösung unseres Gleichungssystems.

b) Es sei L die Lösungsmenge unseres Gleichungssystem. Wir zeigen

$$L=\left\{\begin{pmatrix}a+1\cdot\frac{b-a}{n+1}\\ a+2\cdot\frac{b-a}{n+1}\\ \vdots\\ a+n\cdot\frac{b-a}{n+1}\end{pmatrix}\right\}.$$

Wir wollen also zeigen, dass zwei Mengen gleich sind, müssen also die beiden Inklusionen $\subseteq$ und $\supseteq$ zeigen. Wir beginnen mit der einfacheren $\supseteq$. Setzen wir $x_k=a+k\frac{b-a}{n+1}$ für $k=1,\ldots,n$, so müssen wir zeigen, dass

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

eine Lösung ist. Dies folgt aus

$$2x_1 - x_2 = 2a + 2\frac{b-a}{n+1} - a - 2\frac{b-a}{n+1} = a,$$

$$-x_{n-1} + 2x_n = -a - (n-1)\frac{b-a}{n+1} + 2a + 2n\frac{b-a}{n+1} = a + (n+1)\frac{b-a}{n+1} = b,$$

und

$$\begin{aligned} -x_k + 2x_{k+1} - x_{k+2} &= -a - k\frac{b-a}{n+1} + 2a + 2(k+1)\frac{b-a}{n+1} - a - (k+2)\frac{b-a}{n+1} = \\ &= (-k + 2k + 2 - k - 2)\frac{b-a}{n+1} = 0 \end{aligned}$$

für $k = 1, \dots, n-2$. Nun zur Inklusion $\subseteq$. Es sei also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

eine beliebige Lösung unseres Gleichungssystems. Wir müssen $x_k = a + k\frac{b-a}{n+1}$ für $k = 1, \dots, n$ zeigen. Wir setzen dazu $x_0 = a$ und $x_{n+1} = b$. Dann folgt aus unserem Gleichungssystem

$$-x_k + 2x_{k+1} - x_{k+2} = 0$$

für $k = 0, \dots, n-1$. Dies ist äquivalent zu

$$x_{k+1} - x_k = x_{k+2} - x_{k+1}$$

für $k = 0, \dots, n-1$. Daher sind die Differenzen $x_{k+1} - x_k$ unabhängig von k (also $(x_0, \dots, x_{n+1})$ ist eine arithmetische Folge). Setzen wir $d = x_{k+1} - x_k$ für alle $k = 0, \dots, n$, so erhalten wir für alle $k = 0, \dots, n+1$

$$\begin{aligned} x_k &= x_{k-1} + (x_k - x_{k-1}) = x_{k-1} + d = x_{k-2} + (x_{k-1} - x_{k-2}) + d = x_{k-2} + 2d = \dots \\ &= x_0 + kd = a + kd. \end{aligned}$$

Für $k = n+1$ erhalten wir

$$b = x_{n+1} = a + (n+1)d$$

also $d = \frac{b-a}{n+1}$ und damit wie verlangt

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n+1}$$

für $k = 1, \dots, n$.

Aufgabe 5. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Warum?

a) $\emptyset \subseteq M$ für jede Menge M ($\emptyset =$ die leere Menge)
b) $\emptyset \not\subseteq \mathbb{N}$
c) $\emptyset \notin \mathbb{N}$
d) $\{2, 3, 7\} \subseteq \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
e) $\{2, 3, 7\} \not\subseteq \{2, 4, 5, 6, 7\}$
f) $\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{N}$
g) $1 \in \{1, \{1\}\}$
h) $1 \subseteq \{1, \{1\}\}$
i) $\{1\} \in \{1, \{1\}\}$
j) $\{1\} \subseteq \{1, \{1\}\}$
k) $\{\{1\}\} \in \{1, \{1\}\}$

l) $\{\{1\}\} \not\subseteq \{1, \{1\}\}$

Lösung. Zur Erinnerung: sind A, B Mengen, so ist $A \subseteq B$ äquaivalent zu $\forall a \in A\colon a \in B$ (d.h. jedes Element von A ist auch ein Element von B). Damit ist $A \not\subseteq B$ äquivalent zu: es gibt ein $a \in A$ mit $a \notin B$.
Da c), h), k) etwas problematisch sind, verschieben wir die Lösung dieser drei Aufgaben an den Schluß.

a) Diese Aussage ist wahr, da es sonst ein $a \in \emptyset$ mit $a \notin M$ gibt. Die leere Menge enthält aber kein Element.

b) Diese Aussage ist nach a) falsch.

d) Wegen 2, 3, $7 \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ist diese Aussage wahr.

e) Wegen $3 \in \{2, 3, 7\}$ und $3 \notin \{2, 4, 5, 6, 7\}$ ist diese Aussage wahr.

f) Wegen $-2 = 2(-1)$ und $-1 \in \mathbb{Z}$ gilt $-2 \in \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, aber es ist $-2 \notin \mathbb{N}$. Daher ist diese Aussage falsch.

g) Diese Aussage ist offensichtlich wahr.

i) Diese genauso.

j) Wegen $1 \in \{1, \{1\}\}$ ist diese Aussage wahr.

l) Wegen i) gilt $\{\{1\}\} \subseteq \{1, \{1\}\}$ und daher ist diese Aussage falsch.

c) Um entscheiden zu können, ob $\emptyset \in \mathbb{N}$, muss man entscheiden können, ob es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n = \emptyset$ gibt. Im Rahmen einer naiven Mengenlehre (ala Cantor) gibt es Objekte, die zu Mengen zusammengefasst dürfen. Insbesondere sind dann Objekte keine Mengen. Weiters sind nach der gewohnten Denkweise aus der Schule natürlichen Zahlen Objekte, aber keine Mengen. Dann gilt also $n \neq \emptyset$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und daher ist diese Aussage wahr (in dem eben besprochenen Rahmen).
Aber, wie vielen vielleicht bekannt, führt die Mengenlehre nach Cantor zu Widersprüchen. Dies hat zur Entwicklung der axiomatischen Mengenlehre geführt, auf der sich die Mathematik streng logisch aufbauen läßt. In der axiomatischen Mengenlehre gibt es nur Mengen (keine anderen Objekte). Insbesonderes bedeutet dies, dass alle mathematischen Objekte (inbesondere die natürlichen, ganzen,. . . Zahlen) Mengen sind. Wenn wir jetzt entscheiden wollen, ob $\emptyset = n$ für eine natürliche Zahl n gelten kann, müssten wir wissen, wie natürliche Zahlen als Mengen realisiert werden. Eine gängige Methode ist

$$0 = \emptyset, \quad 1 = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}, \quad 2 = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots ...$$

zu setzen. Wegen $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ (zumindest in dieser Vorlesung zur Linearen Algebra) folgt dann $\emptyset \notin \mathbb{N}$, d.h. die Aussage in c) ist wahr.

h) Im Rahmen einer naiven Mengenlehre ist dies keine Aussage (sprich sinnlos), denn $\subseteq$ ist eine Relation zwischen Mengen, und 1 ist (naiv gesehen) keine Menge.
Um im Rahmen einer axiomatischen Mengenlehre entscheiden zu können, ob dies eine wahre Aussage ist oder nicht, müssten wir zuerst wieder 1 als Menge realisieren. Wir nehmen wieder die gängigste Methode, also $1 = \{\emptyset\}$. Wir müssen also nun entscheiden ob

$$\{\emptyset\} \subset \Big\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\Big\}$$

gilt. Nun sind die Mengen $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$ nicht leer, also gelten $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ und $\emptyset \neq \{\{\emptyset\}\}$. Es folgt, dass

$$\emptyset \notin \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$$

und damit
$$\{\emptyset\} \not\subseteq \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\},$$
d.h. die Aussage in h) ist falsch.

k) Diese Aussage ist äquivalent zu $\{\{1\}\} = 1$ oder $\{\{1\}\} = \{1\}$, d.h. zu $1 = \{\{1\}\}$ oder $1 = \{1\}$. Da 1 im Rahmen einer naiven Mengenlehre keine Menge ist, ist die Aussage in k) dann falsch. Um im Rahmen der axiomatischen Mengenlehre zu entscheiden, ob diese Aussage wahr ist, nehmen wir wieder $1 = \{\emptyset\}$ an. Dann gilt
$$1 = \{\{1\}\} \iff \{\emptyset\} = \{\{\{\emptyset\}\}\} \iff \emptyset = \{\{\emptyset\}\}.$$
Da die letzte Menge nicht leer ist, ist also $1 = \{\{1\}\}$ falsch. Ein analoges Argument zeigt, dass auch die Aussage
$$\{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}\}$$
also
$$1 = \{1\}$$
falsch ist. Insgesamt ist daher die Aussage in k) falsch.