Lineare Algebra 1 (NAWI) – WS 2020/21

Lösungen zum Übungsblatt 02 – 14.10.2020

Die Grundlagen für die Aufgaben 6 und 7 sind in Kapitel *1.2 Relationen* des Skriptums von Prof. Kappel zu finden, das auf der LV-Homepage verlinkt ist.

Aufgabe 6
Untersuchen Sie, ob die folgenden Relationen Äquivalenzrelationen sind und bestimmen Sie ggf. die Äquivalenzklassen.

(a) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, wobei $(a, b)R(c, d) \iff ad = bc$.
(b) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, wobei $(a, b)R(c, d) \iff ad = bc$.

Lösung:
(a) Wir zeigen, dass R eine Äquivalenzrelation ist (also reflexiv, symmetrisch und transitiv ist). Dazu wählen wir (a, b), (c, d), $(e, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ beliebig. Wegen $ab = ba$ gilt $(a, b)R(a, b)$, d.h. R ist reflexiv. Gilt $(a, b)R(c, d)$, also $ad = bc$, so gilt auch $cb = da$, d.h. $(c, d)R(a, b)$. Also ist R symmetrisch. Schließlich gelte $(a, b)R(c, d)$ und $(c, d)R(e, f)$. Dann folgt

$$afd = (ad)f \overset{(a,b)R(c,d)}{=} (bc)f = b(cf) \overset{(c,d)R(e,f)}{=} b(de) = bed.$$

Wegen $d \in \mathbb{N}$ ist $d \neq 0$, und daher können wir in der letzten Gleichung d kürzen und erhalten $af = be$, d.h. $(a, b)R(e, f)$. Wir sehen, dass R auch transitiv ist.
Wir bestimmen noch die Äquivalenzklassen von R. Nach Definition gilt für $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: (wie im Skriptum von Prof. Kappel sei $K(a, b)$ die Äquivalenzklasse von (a, b))

$$\begin{aligned} K(a, b) &= \{(c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (a, b)R(c, d)\} = \{(c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid ad = bc\} = \\ &= \{(c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid b/a = d/c\}. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit $g_{(a,b)}$ die Gerade im $\mathbb{R}^2$ durch $(0, 0)$ und (a, b). Dann gilt für einen Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$: $(x, y) \in g_{(a,b)} \iff y/x = b/a$. Daher gilt

$$K(a, b) = g_{a,b} \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N}),$$

d.h. $K(a, b)$ besteht aus den Punkten von $g_{a,b}$, deren Koordinaten in $\mathbb{N}$ liegen.
(b) Wir zeigen, dass R keine Äquivalenzrelation ist. Wegen $0x = 0$ für alle $x \in \mathbb{Z}$ gelten $(1, 1)R(0, 0)$ und $(0, 0)R(2, 1)$. Aber $1 \cdot 1 = 1 \neq 2 = 1 \cdot 2$, also gilt $(1, 1)R(2, 1)$ nicht. Wir sehen, dass R nicht transitiv und daher keine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 7
Sei $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $S = \{(1, 2), (3, 2), (5, 6)\} \subseteq X \times X$. Bestimmen Sie eine Äquivalenzrelation R auf X, sodass ihre zugehörige Menge $G_R = \{(a, b) \in X \times X : aRb\}$ die Menge S enthält und minimal ist.

Lösung:
Ist R' eine Äquivalenzrelation auf X mit $S \subset G_{R'}$, so folgen

$$1R'2, \quad 3R'2, \quad 5R'6.$$

Da R' transitiv und symmetrisch ist, folgen

$$1R'2, \quad 2R'1, \quad 1R'3, \quad 3R'1, \quad 2R'3, \quad 3R'2, \quad 5R'6, \quad 6R'5.$$

Da R' reflexiv ist, gilt auch $xR'x$ für jedes $x \in X$.
Damit folgt

$$G := \{(x, x) \mid x \in X\} \cup \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (5, 6), (6, 5)\} \subset G_{R'},$$

für jede Äquivalenzrelation R' auf X mit $S \subset G_{R'}$. Wir konstruieren jetzt eine Äquivalenzrelation R auf X mit $G_R = G$. Diese hat dann die gewünschten Eigenschaften. Dazu definieren wir für $x, y \in X$: $xRy \iff (x, y) \in G$. Dann gilt $G_R = G$.
Es bleibt zu zeigen, dass R eine Äquivalenzrelation ist (das sollte klar sein). Nach Konstruktion gelten $(x, x) \in G$ und $(x, y) \in G \Rightarrow (y, x) \in G$ für alle $x, y \in X$. Daher ist R reflexiv und symmetrisch. Um die Transitivität von R zu zeigen, seien $x, y, z \in X$ mit $(x, y) \in G$ und $(y, z) \in G$. Gilt $x = y$ oder $y = z$, so folgt sofort $(x, z) \in G$. Wir können daher $x \neq y$ und $y \neq z$ annehmen. Wegen $(w, 4) \notin G$ für alle $w \in X$ mit $w \neq 4$, ist $y \neq 4$, d.h. $y \in \{1, 2, 3\}$ oder $y \in \{5, 6\}$. Gilt $y \in \{1, 2, 3\}$ so folgen aus der Definition von G zunächst $x, z \in \{1, 2, 3\}$ und dann auch $(x, z) \in G$. Analog folgt aus $y \in \{5, 6\}$ zuerst $x, z \in \{5, 6\}$ und dann $(x, z) \in G$.

Aufgabe 8
Sei X eine nichtleere Menge und Z eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ mit $\emptyset \notin Z$. Wir nennen Z eine Partition von X, wenn $X = \bigcup_{A \in Z} A$ und $A \cap B = \emptyset$ für alle $A, B \in Z$ mit $A \neq B$ (vergleiche *Definition 1.11* im Skript von Prof. Kappel).
Zeigen Sie, dass Z genau dann eine Partition ist, wenn für jedes $x \in X$ ein eindeutiges $A \in Z$ existiert, sodass $x \in A$.

Lösung:
Wir nehmen zunächst an, dass Z eine Partition ist. Ist nun $x \in X$ beliebig so müssen wir zeigen:

(a) Es gibt ein $A \in Z$ mit $x \in A$.
(b) Sind $A, B \in Z$ mit $x \in A$ und $x \in B$ so gilt $A = B$.

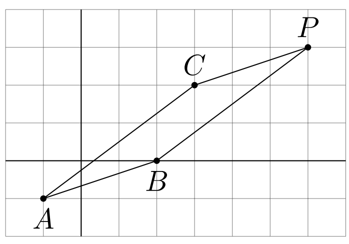
(a) folgt aus $X = \bigcup_{A \in Z} A$. Zum Beweis von (b) seien $A, B \in Z$ mit $x \in A$ und $x \in B$. Dann gilt $x \in A \cap B$, also $A \cap B \neq \emptyset$. Da Z eine Partition ist, folgt $A = B$.
Wir nehmen nun umgekehrt an, dass jedes $x \in X$ in genau einem $A \in Z$ enthalten ist und zeigen, dass Z eine Partition ist. Da jedes $x \in X$ in einem $A \in Z$ enthalten ist, gilt $X \subset \bigcup_{A \in Z} A$. Da die Inklusion $X \supset \bigcup_{A \in Z} A$ klar ist (wegen $A \subset X$ für alle $A \in Z$) gilt $X = \bigcup_{A \in Z} A$.
Es seien $A, B \in Z$ mit $A \neq B$. Angenommen es ist $A \cap B \neq \emptyset$. Dann können wir ein $x \in A \cap B$ wählen. Nach Voraussetzung ist x in genau einem Element von Z enthalten. Es folgt $A = B$, Widerspruch. Also war unsere Annahme $A \cap B \neq \emptyset$ falsch, d.h. es ist $A \cap B = \emptyset$.

Aufgabe 9
(a) Bestimmen Sie alle möglichen Punkte P des $\mathbb{R}^2$, sodass P, $(-1, -1)$, $(2, 0)$ und $(3, 2)$ die vier Eckpunkte eines Parallelogramms sind.
(b) Bestimmen Sie alle möglichen Paare von Punkten Q, R des $\mathbb{R}^2$, sodass Q, R, $(2, 3)$ und $(-2, 1)$ die vier Eckpunkte eines Quadrats sind.

Lösung:
(a) Wir setzen $A = (-1, -1)$, $B = (2, 0)$ und $C = (3, 2)$. Es sei P ein Punkt des $\mathbb{R}^2$ mit der gewünschten Eigenschaft. Dann gibt es drei Möglichkeiten:

(i) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ sind die Seiten des Parallelogramms, die A enthalten.
(ii) $\overline{AB}$, $\overline{AP}$ sind die Seiten des Parallelogramms, die A enthalten.
(iii) $\overline{AC}$, $\overline{AP}$ sind die Seiten des Parallelogramms, die A enthalten.

Fall (i) liefert das Bild

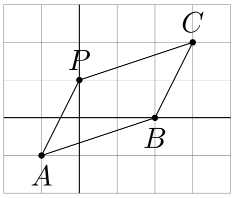


,

also $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Wir erhalten

$$P = A + \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Im Fall (ii) schaut das Bild so aus:

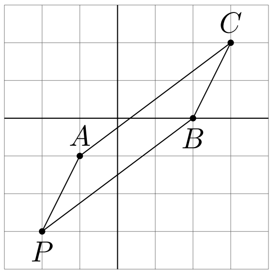


.

Wir erhalten $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC}$, also

$$P = A + \overrightarrow{AP} = A + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich liefert Fall (iii) das Bild



,

und daher ist $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB}$, also

$$P = A + \overrightarrow{AP} = A + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir setzen $A = (2,3)$ und $B = (-2,1)$. Dann ist $\overrightarrow{AB} = (-4,-2)$. Es seien nun Q, R Punkte in $\mathbb{R}^2$ mit den gewünschten Eigenschaften. Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

(i) $\overline{AB}$ ist eine Seite des Quadrats.
(ii) $\overline{AB}$ ist eine Diagonale des Quadrats.

Im Fall (i) können wir annehmen, dass $\overline{AQ}$ die zweite Seite ist, die A enthält (sonst müssen wir nur die Bezeichnungen vertauschen). Dann gelten

$$Q = A + \overrightarrow{AQ}, \quad R = B + \overrightarrow{AQ}.$$

Weiters steht $\overrightarrow{AQ}$ normal auf $\overrightarrow{AB}$ und hat die gleiche Länge wie $\overrightarrow{AB}$. Es folgt

$$\overrightarrow{AQ} = \pm \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

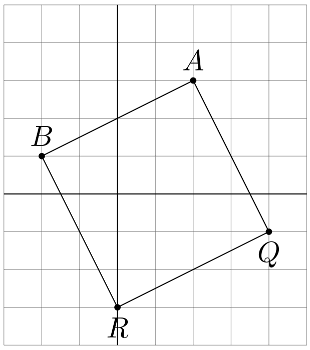
Wir erhalten damit die beiden Möglichkeiten

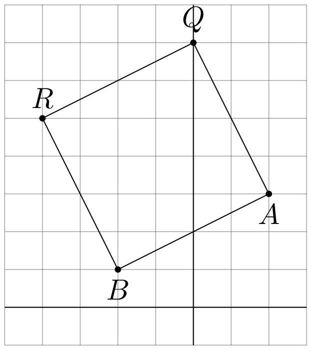
$$Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

und

$$Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Das ergibt die beiden Quadrate

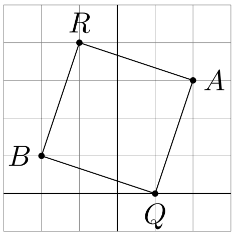




Nun zum Fall (ii). In einem Quadrat stehen die Diagonalen normal aufeinander, halbieren sich gegenseitig und sind gleich lang. Ist daher $S = A + 1/2\overrightarrow{AB} = (0,2)$ der Mittelpunkt von $\overline{AB}$, so gelten (eventuell wieder nach Umbenennung)

$$Q = S + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad R = S - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}.$$

Wir erhalten das Quadrat

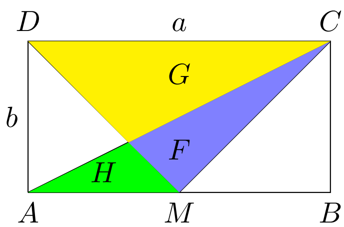


.

Aufgabe 10

Seien A, B, C und D die Eckpunkte eines Rechtecks (wie üblich im Gegenuhrzeigersinn) mit Fläche 1. Weiters sei M der Mittelpunkt der Strecke AB und S der Schnittpunkt der Strecken AC und DM. Bestimmen Sie die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten S, M und C. *Hinweis: Strahlensatz*

Lösung:
Das Bild sieht so aus



(wir vergessen einmal, dass der Flächeninhalt unseres Rechtecks 1 ist). Es sei a die Länge von $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ und b diejenige von $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$. Wir bezeichnen mit F den Flächeninhalt des blauen Dreiecks (also den gesuchten), mit G denjenigen des gelben Dreiecks und schließlich mit H denjenigen des grünen Dreiecks.
Wir stellen nun drei Gleichungen für F, G, H auf. Das Dreieck mit den Ecken A, B, C hat den Flächeninhalt $ab/2$. Das Dreieck mit den Ecken M, B, C hat den Flächeninhalt $1/2 \cdot (a/2)b = 1/4ab$. Aus der Zeichnung erhalten wir daher die erste Gleichung

$$F + H = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}ab.$$

Das Dreieck mit den Ecken M, C, D hat den Flächeninhalt $ab/2$. Aus der Zeichnung folgt dann

$$G + F = \frac{1}{2}ab.$$

Da $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ parallel sind, sind das gelbe und das grüne Dreieck ähnlich (da die entsprechenden Winkeln gleich sind). Nun ist $\overline{CD}$ doppelt so lang wie $\overline{AM}$, woraus unsere dritte Gleichung $G = 4H$ folgt.
Wir haben also nun das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} F & + & & & H & = & \frac{1}{4}ab \\ F & + & G & & & = & \frac{1}{2}ab \\ & & G & - & 4H & = & 0 \end{array} .$$

Zur Übung lösen wir dieses wieder mit der Methode der Lösungen zum ersten Blatt:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{4}ab \\ 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2}ab \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array} \xrightarrow{4z_1+z_3} \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{4}ab \\ 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2}ab \\ 4 & 1 & 0 & ab \end{array} \xrightarrow{-z_2+z_3} \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{4}ab \\ 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2}ab \\ 3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}ab \end{array} \xrightarrow{\frac{1}{3}z_3}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{4}ab \\ 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2}ab. \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6}ab \end{array}$$

Da wir nur an F interessiert sind, sind wir fertig, denn aus der dritten Zeile folgt $F = ab/6$, also $F = 1/6$, falls $ab = 1$ ist.

Man kann solche Beispiele auch unelegant mit Hilfe der analytischen Geometrie lösen. Dazu wählen wir unser Koordinatensystem so, dass $A = (0,0)$, $B = (a,0)$ und $C = (a,b)$ gelten. Dann gelten $D = (0,b)$ und $M = (a/2,0)$. Die Gerade g_{AC} durch A und C hat die Parameterdarstellung

$$g_{AC} = \left\{ A + t\overrightarrow{AC} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Gerade g_{MD} durch M und D hat die Parameterdarstellung

$$g_{MD} = \left\{ M + t\overrightarrow{MD} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -a/2 \\ b \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Um S, den Schnittpunkt von g_{AC} und g_{MD} zu erhalten, müssen wir also das Gleichungssystem (in s, t)

$$a/2 - sa/2 = ta, \quad sb = tb$$

lösen. Wegen $b \neq 0$ folgt aus der zweiten Gleichung $s = t$ und dann aus der ersten (wegen $a \neq 0$) $t = 1/3$. Damit erhalten wir $S = 1/3(a,b)$.
Den gesuchten Flächeninhalt kann man jetzt auf zwei Methoden berechnen (das hängt auch davon ab, wieviel Sie in der Schule gelernt haben).
1. Möglichkeit: Es sei α der Winkel zwischen $\overline{CM}$ und $\overline{CS}$. Bezeichnen wir die Länge eines Vektors v mit $\|v\|$ so gilt

$$F = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{CS}\| \cdot \|\overrightarrow{CM}\| \sin(\alpha).$$

Zunächst gelten

$$\|\overrightarrow{CS}\| = \left\| -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 + b^2}$$

und

$$\|\overrightarrow{CM}\| = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -b \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2/4 + b^2}$$

Um $\sin(\alpha)$ zu bestimmen, berechnen wir zunächst $\cos(\alpha)$ mit Hilfe der Formel

$$\langle \overrightarrow{CS}, \overrightarrow{CM} \rangle = \|\overrightarrow{CS}\| \cdot \|\overrightarrow{CM}\| \cos(\alpha).$$

Dabei ist $\langle\overrightarrow{CS}, \overrightarrow{CM}\rangle$ das Skalarprodukt (=inneres Produkt) von $\overrightarrow{CS}$ und $\overrightarrow{CM}$, das in der Schule mit $\overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{CM}$ bezeichnet wird. Wegen

$$\langle\overrightarrow{CS}, \overrightarrow{CM}\rangle = \langle -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -b \end{pmatrix}\rangle = \frac{a^2+2b^2}{3}$$

erhalten wir

$$\cos(\alpha) = \frac{a^2+2b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2/4+b^2}}.$$

Aus der Gleichung

$$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha) = 1$$

folgt

$$\sin(\alpha) = \pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}.$$

Wegen $0 \leq \alpha \leq \pi$ (sogar $0 < \alpha < \pi/2$ wie aus der Zeichnung ersichtlich) ist $\sin(\alpha) \geq 0$ und daher $\sin(\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)}$. Nun ist

$$\begin{aligned} 1-\cos^2(\alpha) &= 1 - \frac{a^4+4a^2b^2+4b^4}{4(a^2+b^2)(a^2/4+b^2)} = \frac{a^4+5a^2b^2+4b^4-a^4-4a^2b^2-4b^4}{4(a^2+b^2)(a^2/4+b^2)} = \\ &= \frac{a^2b^2}{4(a^2+b^2)(a^2/4+b^2)} = \left(\frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2/4+b^2}}\right)^2, \end{aligned}$$

woraus

$$\sin(\alpha) = \frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2/4+b^2}}$$

folgt. Damit ergibt sich

$$F = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{CS}\|\cdot\|\overrightarrow{CM}\|\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2/4+b^2}\cdot\frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2/4+b^2}} = \frac{ab}{6}.$$

2. Möglichkeit: Wir benutzen das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_1 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Ist dann D ein Dreieck im $\mathbb{R}^3$ mit den Ecken X, Y, Z, so gilt für den Flächeninhalt A von D die Formel

$$A = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{XY}\times\overrightarrow{XZ}\|.$$

Wir erhalten damit in unserem Fall

$$F = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}a \\ -\frac{2}{3}b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3}ab \end{pmatrix}\right\| = \frac{ab}{6}.$$