**Lineare Algebra 1 (NAWI) – WS 2020/21**

# Lösungen zum Übungsblatt 03 zu Lineare Algebra 1 (NAWI) – WS 2020/21

**Aufgabe 11**
Seien $A$, $B$, $C$ Mengen. Zeigen Sie:

$$A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B) \cup (A \cap C).$$

*Lösung:*
Wir wählen eine Menge $X$ mit $A \subset X$, $B \subset X$ und $C \subset X$ (zum Beispiel $X = A \cup B \cup C$) und setzen $C^c = X \setminus C$. Dann folgen

$$B \setminus C = B \cap C^c, \quad A\backslash C^c = A \cap C.$$

Mit Verwendung von de Morgan folgt

$$A\backslash(B\backslash C) = A\backslash(B \cap C^c) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C^c) = (A\backslash B) \cup (A \cap C).$$

**Aufgabe 12**
Seien $a$ und $b$ ganze Zahlen. Man sagt $a$ teilt $b$, falls es eine ganze Zahl $q$ gibt, so dass $aq = b$ und schreibt dafür $a|b$.

a) Also definiert $a|b$ eine Relation auf $\mathbb{N}$ und auf $\mathbb{Z}$. Auf welcher dieser beiden Mengen ist dies eine Ordnungsrelation bzw. eine Totalordnung?
b) Zeigen Sie, dass die Relation
$$aRb \iff 5|(a-b)$$
auf $\mathbb{N}$ eine Äquivalenzrelation ist und bestimmen Sie die Äquivalenzklassen.

*Lösung:*
a) Wegen $1 \cdot (-1) = -1$ gilt $1 \mid -1$ und wegen $(-1) \cdot (-1) = 1$ gilt $-1 \mid 1$. Also

$$1 \mid -1 \quad \text{und} \quad -1 \mid 1 \quad \text{und} \quad 1 \neq -1.$$

Daher ist $\mid$ auf $\mathbb{Z}$ nicht antisymmetrisch und damit keine Ordnungsrelation (also erst recht keine Totalordnung).
Wir zeigen nun, dass $\mid$ auf $\mathbb{N}$ eine Ordnungsrelation ist. Dazu müssen wir für alle $a$, $b$, $c \in \mathbb{N}$ folgende Aussagen zeigen:

1. $a \mid a$.
2. $(a \mid b$ und $b \mid a) \Rightarrow a = b$.
3. $(a \mid b$ und $b \mid c) \Rightarrow a \mid c$.

Dazu wählen wir $a$, $b$, $c \in \mathbb{N}$ beliebig. 1 folgt aus $a \cdot 1 = a$. Zum Beweis von 2 nehmen wir $a \mid b$ und $b \mid a$ an und müssen $a = b$ zeigen. Wegen $a \mid b$ können wir ein $q_1 \in \mathbb{Z}$ mit $aq_1 = b$ wählen. Analog finden wir $q_2 \in \mathbb{Z}$ mit $bq_2 = a$. Wegen $a$, $b \in \mathbb{N}$ (also $a$, $b > 0$) gelten auch $q_1$, $q_2 \in \mathbb{N}$. Aus

$$b = aq_1 = (bq_2)q_1 = bq_2q_1 \quad \text{und} \quad b \neq 0$$

folgt $1 = q_1q_2$. Wegen $q_1$, $q_2 \in \mathbb{N}$ erhalten wir $q_1 = q_2 = 1$ und damit $a = bq_2 = b$.
Zum Beweis von 3 nehmen wir $a \mid b$ und $b \mid c$ an und müssen $a \mid c$ zeigen. Die Definition der Relation $\mid$ liefert ganze Zahlen $q_1$, $q_2$ mit $aq_1 = b$ und $bq_2 = c$. Aus

$$a(q_1q_2) = (aq_1)q_2 = bq_2 = c$$

folgt $a \mid c$.
Wegen $2 \nmid 3$ und $3 \nmid 2$ ist $\mid$ keine Totalordnung auf $\mathbb{N}$.

b) Wir zeigen, dass $R$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$ ist. Dazu müssen wir für alle $a$, $b$, $c \in \mathbb{N}$ zeigen:

1. $aRa$, d.h. $5 \mid a - a = 0$.
2. $aRb \Rightarrow bRa$, d.h. $5 \mid a - b \Rightarrow 5 \mid b - a$.
3. $(aRb$ und $bRc) \Rightarrow aRc$, d.h. $(5 \mid a - b$ und $5 \mid b - c) \Rightarrow 5 \mid a - c$.

Es seien $a$, $b$, $c \in \mathbb{N}$ beliebig. 1 folgt aus $5 \cdot 0 = 0$. Zum Beweis von 2 nehmen wir $5 \mid a - b$ an und zeigen $5 \mid b - a$. Wegen $5 \mid a - b$ können wir ein $q \in \mathbb{Z}$ mit $5q = a - b$ wählen. Dann folgt aus

$$5(-q) = b - a$$

auch $5 \mid b - a$.
Wir kommen zum Beweis von 3. Dazu nehmen wir wieder $5 \mid a - b$ und $5 \mid b - c$ an und müssen $5 \mid a - c$ zeigen. Wir wählen dazu $q_1$, $q_2 \in \mathbb{Z}$ mit $5q_1 = a - b$ und $5q_2 = b - c$. Dann folgt aus

$$5(q_1 + q_2) = a - b + b - c = a - c$$

auch $5 \mid a - c$.
Wir bestimmen noch die Menge der Äquivalenzklassen. Wie im Skriptum von Professor Kappel bezeichnen wir für $a \in \mathbb{N}$ mit $K(a)$ die Äquivalenzklasse von $a$ (bezüglich $R$). Wir zeigen, dass

$$\{K(1),\ K(2),\ K(3),\ K(4),\ K(5)\}$$

die Menge der Äquivalenzklassen von $R$ ist, und dass $K(1)$, $K(2)$, $K(3)$, $K(4)$, $K(5)$ paarweise verschieden sind. Zum Beweis der ersten Aussage müssen wir zeigen, dass es für jedes $a \in \mathbb{N}$ ein $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mit $K(a) = K(i)$, d.h. $5 \mid a - i$, gibt. Wir wählen dazu $a \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir dividieren nun $a$ mit Rest durch 5. Dann erhalten wir ein $q \in \mathbb{N}_0$ und ein $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ mit $a = 5q + r$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:
1.Fall: $r = 0$. Dann gilt $a = 5q$, woraus $5(q - 1) = a - 5$,also $5 \mid a - 5$, folgt. Wir können daher $i = 5$ setzen.
2.Fall: $r \neq 0$. Dann gilt $r \in \{1, 2, 3, 4\}$ und wir setzen $i = r$. Aus $5q = a - r = a - i$, folgt $5 \mid a - i$.
Wir zeigen noch, dass $K(1)$, $K(2)$, $K(3)$, $K(4)$, $K(5)$ paarweise verschieden sind. Dazu wählen wir $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mit $K(i) = K(j)$ und zeigen $i = j$. Wegen $K(i) = K(j)$ gilt $iRj$, d.h. $5 \mid i - j$. Wir können daher ein $q \in \mathbb{Z}$ mit $5q = i - j$ wählen. Wegen $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ folgt $|i - j| \leq 4$ und damit

$$5|q| = |i - j| \leq 4,$$

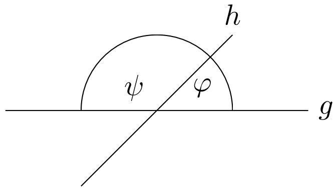
also $|q| < 1$. Wegen $q \in \mathbb{Z}$ impliziert dies $q = 0$ und damit $i - j = 0$, d.h. $i = j$.

**Aufgabe 13**

(a) Berechnen Sie den Winkel, den eine Raumdiagonale und eine Flächendiagonale durch den selben Eckpunkt eines Würfels einschließen.

(b) Berechnen Sie den Winkel, den zwei Raumdiagonalen eines Würfels einschließen.

*Lösung:*
Zunächst eine Vorbemerkung: wir suchen in diesem Beispiel den Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden $g$ und $h$:




Wie das Bild zeigt, müssen wir uns darauf einigen, welchen der beiden Winkel $\varphi$, $\psi$ wir als Winkel zwischen $g$ und $h$ bezeichnen. Offenbar gilt $\varphi + \psi = \pi$ und daher liegt genau einer

zwischen 0 und $\pi/2$ (d.h. ist ein spitzer Winkel). Diesen bezeichnen wir dann als den Winkel zwischen $g$ und $h$ (im Bild also $\varphi$).
Es sei nun $v$ ein Richtungsvektor von $g$ und $w$ einer von $h$. Dann gilt

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|} \qquad \text{oder} \qquad \cos(\psi) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}.$$

Wegen $\varphi + \psi = \pi$ gilt $\cos(\psi) = -\cos(\varphi)$ und damit ist

$$\cos(\varphi) = \pm\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}.$$

Wegen $\cos(\varphi) \geq 0$ (wegen $0 \leq \varphi \leq \pi/2$) folgt also

$$\cos(\varphi) = \left|\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}\right| = \frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\|\|w\|},$$

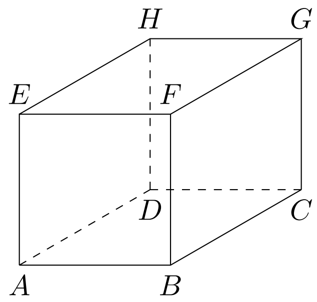
und damit

$$\varphi = \arccos\left(\frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\|\|w\|}\right).$$

a) Wir können annehmen, dass der Würfel der Würfel mit den Eckpunkten

$$A = (0,0,0),\ B = (1,0,0),\ C = (1,1,0),\ D = (0,1,0),$$
$$E = (0,0,1),\ F = (1,0,1),\ G = (1,1,1),\ H = (0,1,1)$$

ist:




(a) Gesucht ist der Winkel $\varphi$ zwischen der Geraden durch $A$ und $G$ und der Geraden durch $A$ und $F$. Wir erhalten

$$\varphi = \arccos\left(\frac{|\langle \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AF}\rangle|}{\|\overrightarrow{AG}\| \cdot \|\overrightarrow{AF}\|}\right).$$

Aus

$$\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\varphi = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{2}}\right) \approx 0.62 \approx 35.26^\circ.$$

(b) Diesmal ist der Winkel $\varphi$ zwischen der Geraden $g_{AG}$ durch $A$, $G$ und der Geraden $g_{CE}$ durch $C$, $E$ gesucht. Wir überlegen uns zunächst, dass sich diese Geraden wirklich schneiden. Diese Geraden haben die Gestalt

$$g_{AG} = \left\{ t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\}, \quad g_{CE} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\right\}.$$

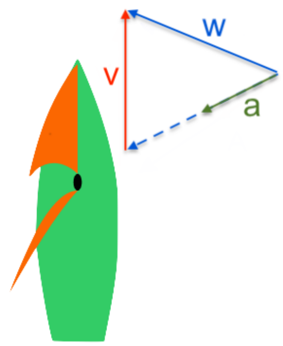
Durch genaues Hinschauen sieht man

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \in g_{AG} \cap g_{CE}.$$

Für den Winkel $\varphi$ erhalten wir nun

$$\varphi = \arccos\left(\frac{|-1|}{\sqrt{3}\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 1.23 \approx 70.53^\circ.$$

**Aufgabe 14**
Ein Schiff segelt mit der Geschwindigkeit und Richtung $\mathbf{v}_1$. Der Wind weht scheinbar (nach der Windfahne am Mast zu urteilen) in Richtung eines Vektors $\mathbf{a}_1$. Bei Änderung der Richtung und Geschwindigkeit des Schiffes von $\mathbf{v}_1$ auf $\mathbf{v}_2$ ist der scheinbare Wind in Richtung eines Vektors $\mathbf{a}_2$. Finden Sie die Vektorgeschwindigkeit des wahren Windes $\mathbf{w}$.




*Hinweis: Die Geschwindigkeit des wahren Windes ist die Summe aus der Schiffsgeschwindigkeit und der Geschwindigkeit des scheinbaren Windes.*

*Lösung:*
Da wir vom scheinbaren Wind nur die Richtung aber nicht die genaue Länge kennen, erhalten wir

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + t_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{v}_2 + t_2\mathbf{a}_2$$

für gewisse $t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}$. Damit können wir das Problem in ein mathematisches Problem umformulieren: gegeben sind vier Vektoren $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ und man weiß, dass es $t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{v}_1 + t_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{v}_2 + t_2\mathbf{a}_2$ gibt. Ist dann der Vektor $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + t_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{v}_2 + t_2\mathbf{a}_2$ eindeutig bestimmt, und wenn ja, wie läßt er sich durch die gegebenen Daten $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2$ berechnen.
Wir lösen zunächst dieses mathematische Problem. Ist $\mathbf{a}_1 = 0$, so ist $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1$ eindeutig bestimmt (und schon durch die gegeben Daten dargestellt). Analog gilt $\mathbf{w} = \mathbf{v_2}$ im Fall $\mathbf{a}_2 = 0$ .
Wir können daher annehmen, dass $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2$ beide nicht Null sind. Setzen wir $x_k = \|\mathbf{a}_k\|$ für $k = 1, 2$, so folgen

$$\mathbf{v}_1 + (x_1t_1)(\frac{1}{x_1}\mathbf{a}_1) = \mathbf{v}_1 + t_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{v}_2 + t_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{v}_2 + (x_2t_1)(\frac{1}{x_2}\mathbf{a}_1).$$

Ersetzen wir daher $\mathbf{a}_k$ durch $\mathbf{a}_k/x_k$, so können wir $\|\mathbf{a}_1\| = \|\mathbf{a}_2\| = 1$ annehmen. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:
1.Fall: $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ sind linear abhängig. Wegen $\mathbf{a}_2 \neq 0$ gibt es dann ein $u \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{a}_1 = u\mathbf{a}_2$. Dann gilt für jedes $s \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{v}_1 + (t_1 + s)\mathbf{a}_1 = \mathbf{v}_1 + t_1\mathbf{a}_1 + s\mathbf{a}_1 = \mathbf{v}_2 + t_2\mathbf{a}_2 + us\mathbf{a}_2 = \mathbf{v}_2 + (t_2 + us)\mathbf{a}_2.$$

Also gibt es in diesem Fall keine eindeutige Lösung.
2.Fall: $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ sind linear unabhängig. Dann wissen wir, dass $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist. Daher läßt sich jeder Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ eindeutig als Linearkombination von $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ schreiben. Aus

$$t_1\mathbf{a_1} - t_2\mathbf{a_2} = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} \tag{1}$$

folgt, dass $t_1$ und $t_2$ eindeutig bestimmt sind. Unsere Aufgabe ist jetzt, $t_1$ und $t_2$ zu berechnen. Der erste Ansatz, der einem einfällt, wäre es

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{2,1} \\ a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix}$$

zu setzen und zu versuchen, das Gleichungssystem (in $t_1$, $t_2$)

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1}t_1 & - & a_{2,1}t_2 & = & v_{1,1} - v_{2,1} \\ a_{1,2}t_1 & - & a_{2,2}t_2 & = & v_{1,2} - v_{2,2} \end{array}$$

zu lösen. Das schaut nicht erfreulich aus, also suchen wir eine einfachere Methode.
Dazu wenden wir $\langle -, \mathbf{a}_1 \rangle$ und $\langle -, \mathbf{a}_2 \rangle$ auf die Gleichung (1) an. Wegen $\langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k \rangle = \|\mathbf{a}_k\|^2 = 1$ für $k = 1, 2$ erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\begin{array}{ccccc} t_1 & - & t_2\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle & = & \langle \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_1 \rangle \\ t_1\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle & - & t_2 & = & \langle \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_2 \rangle \end{array}.$$

Addieren wir das $-\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$–fache der ersten Zeile zur zweiten dazu, erhalten wir

$$\begin{aligned} t_2(\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle^2 - 1) &= \langle \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_2 \rangle - \langle \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_1 \rangle \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle = \\ &= \langle \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_2 \rangle - \langle \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{a}_1 \rangle = \\ &= \langle \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_2 - \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{a}_1 \rangle. \end{aligned} \tag{2}$$

Aus der Cauchy–Schwarzsche Ungleichung folgt

$$|\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle| \leq \|\mathbf{a}_1\| \|\mathbf{a}_2\| = 1$$

und, dass Gleichheit nur dann gilt, wenn $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ linear abhängig sind. Da $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ aber linear unabhängig sind erhalten wir

$$|\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle| < 1$$

und damit auch $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle^2 - 1 \neq 0$, sodass wir in (2) durch diese Zahl dividieren können. Wir erhalten

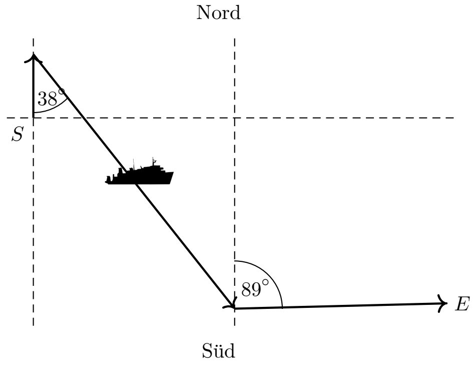
$$t_2 = \frac{\langle \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_2 - \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{a}_1 \rangle}{\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle^2 - 1}$$

und damit

$$w = \mathbf{v}_2 + t_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{v}_2 + \frac{\langle \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_2 - \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{a}_1 \rangle}{\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle^2 - 1}\mathbf{a}_2.$$

Was bedeutet nun die Lösung des mathematischen Problems für den Kapitän des Schiffes, wenn er mit dieser Methode den wahren Wind berechnen will? Der Fall $\mathbf{a}_1 = 0$ (bzw. $\mathbf{a}_2 = 0$) bedeutet, dass die Geschwindigkeitsvektoren des Schiffes und des wahren Windes gleich sind. Dann wird die Windfahne am Mast mehr oder weniger schlaff vom Mast hängen, wodurch es praktisch schwierig wird, eine eindeutige Richtung zu erkennen. Also muß der Kapitän die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ so wählen, dass $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ linear unabhängig sind (dazu muss er eventuell öfters probieren). Einfacher wird es jedoch sein, er besorgt sich ein Meßgerät, das den genauen Geschwindigkeitsvektor des scheinbaren Windes misst.

### Aufgabe 15




Während der Manöver vor der Schlacht von Jütland[a] bewegte sich der britische Schlachtkreuzer *Lion* wie folgt (in Seemeilen): 1.2 Meilen nördlich, 6.1 Meilen 38 Grad östlich von Süd und 4.0 Meilen bei 89 Grad östlich von Nord. Berechnen Sie den Abstand zwischen Start- und Endposition. (Ignorieren Sie die Erdkrümmung und arbeiten Sie mit einer Dezimalstelle).

[a] `https://de.wikipedia.org/wiki/Skagerrakschlacht`

*Lösung:*
Wir legen unser Koordinatensystem so, dass $S = (0, 0)$ gilt. Dann erhalten wir

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.2 \end{pmatrix} + 6.1 \begin{pmatrix} \sin(38^\circ) \\ \cos(38^\circ) \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} \cos(1^\circ) \\ \sin(1^\circ) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 7.7 \\ -3.5 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir für den gesuchten Abstand $r$

$$r = \sqrt{7.7^2 + 3.5^2} \approx 8.4 \quad .$$