Lineare Algebra 1 (NAWI) – WS 2020/21

Lösungen zum Übungsblatt 04 – 28.10.2020

Aufgabe 16
Stellen Sie jeweils für die gegebenen Vektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ im $\mathbb{R}^3$ fest, ob diese linear unabhängig sind. Drücken Sie andernfalls einen Vektor als Linearkombination der beiden anderen Vektoren aus.

(a)
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix};$$

(b)
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

(c)
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ sind genau dann linear unabhängig, wenn für alle x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Um zu untersuchen, ob $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ linear unabhängig sind, lösen wir daher die Gleichung

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = 0.$$

Schreiben wir

$$\mathbf{v}_k = \begin{pmatrix} v_{1,k} \\ v_{2,k} \\ v_{3,k} \end{pmatrix}$$

so erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} v_{1,1}x_1 & + & v_{1,2}x_2 & + & v_{1,3}x_3 & = & 0 \\ v_{2,1}x_1 & + & v_{2,2}x_2 & + & v_{2,3}x_3 & = & 0 \\ v_{3,1}x_1 & + & v_{3,2}x_2 & + & v_{3,3}x_3 & = & 0 \end{array}$$

das wir mit der Methode von den Lösungen zu Blatt 1 lösen können. Beachte, dass im jetzigen Fall die rechten Seiten Null sind. Im Lösungsprozeß bleiben Sie daher auch immer Null. Wir müssen daher die rechten Seiten nicht extra anschreiben.

(a)

$$\begin{array}{ccc} 0 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{array} \xrightarrow{3z_2+z_3} \begin{array}{ccc} 0 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 15 \end{array} \xrightarrow{2z_3+z_1} \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 31 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 15 \end{array} \xrightarrow{1/31\cdot z_1} \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 15 \end{array} \xrightarrow[-15z_1+z_3]{-5z_1+z_2}$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0. \\ 0 & 2 & 0 \end{array}$$

Damit schaut unser Gleichungssystem nun so aus

$$x_3 = 0, \quad -x_1 = 0, \quad 2x_2 = 0.$$

Also folgt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und damit sind $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ linear unabhängig.
(b)

$$\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \quad \xrightarrow{-2z_2+z_1} \quad \begin{array}{ccc} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \quad \xrightarrow{z_3+z_1} \quad \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \quad \xrightarrow{-z_3+z_2} \quad \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0. \\ 0 & 2 & 1 \end{array}$$

Wir erhalten also

$$x_1 - x_2 = 0, \quad 2x_2 + x_3 = 0, \quad \text{d.h.} \quad x_1 = x_2, \quad x_3 = -2x_2.$$

Wir können daher x_2 beliebig wählen. Zur Übung (auch wenn wir es für diese Aufgabe nicht benötigen) bestimmen wir die Lösungsmenge unseres Gleichungssystems. Da wir x_2 beliebig wählen dürfen setzen wir $x_2 = t$ und erhalten $x_1 = t$ und $x_3 = -2t$. Damit erhalten wir als Lösungsmenge

$$\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wählen wir zum Beispiel $t = 1$, so erhalten wir die Lösung $(1, 1, -2)$. Damit folgt

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3 = 0$$

(also sind $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ linear abhängig) und zum Beispiel

$$\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3.$$

(c)

$$\begin{array}{ccc} -1 & 5 & 13 \\ 3 & 1 & -7 \\ 2 & 4 & 2 \end{array} \quad \xrightarrow[2z_1+z_3]{3z_1+z_2} \quad \begin{array}{ccc} -1 & 5 & 13 \\ 0 & 16 & 32 \\ 0 & 14 & 28 \end{array} \quad \xrightarrow[\frac{1}{14}z_3]{\frac{1}{16}z_2} \quad \begin{array}{ccc} -1 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \quad \xrightarrow[-z_2+z_3]{-5z_2+z_1} \quad \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2. \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Wir erhalten die Gleichungen

$$x_1 = 3x_3, \quad x_2 = -2x_3.$$

Also können wir diesmal x_3 beliebig wählen und erhalten als Lösungsmenge (wieder zur Übung)

$$\left\{ t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wählen wir $t = 1$ so erhalten wir

$$3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = 0$$

(daher sind $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ linear abhängig) und zum Beispiel

$$\mathbf{v}_3 = -3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2.$$

Aufgabe 17

Es seien $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Untersuchen Sie die folgenden beiden Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt.

(a) Sind $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ linear unabhängig, so sind sie auch paarweise linear unabhängig.[1]

(b) Sind $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ paarweise linear unabhängig, so sind sie linear unabhängig.

[1] Man sagt, die Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sind *paarweise linear unabhängig*, wenn für alle i, $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ die Vektoren $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_j$ linear unabhängig sind.

Lösung:
(a) Wir beweisen, dass diese Aussage wahr ist. Es seien also $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ linear unabhängig. Wir zeigen, dass sie dann auch paarweise linear unabhängig sind. Da jede Permutation der $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ ebenfalls linear unabhängig ist, genügt es zu zeigen, dass $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ linear unabhängig sind. Dazu wählen wir $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = 0$ und zeigen $x_1 = x_2 = 0$. Wir haben

$$0 = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + 0 \cdot \mathbf{v}_3.$$

Da $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ linear unabhängig, folgt $x_1 = x_2 = 0$.
(b) Wir zeigen mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass diese Aussage im allgemeinen falsch ist. Dazu setzen wir

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Keiner dieser Vektoren ist ein Vielfaches eines anderen Vektors. Daher sind $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ paarweise linear unabhängig. Aber wegen

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

sind $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ linear abhängig.

Aufgabe 18
Es seien $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ Vektoren im $\mathbb{R}^d$ (mit $d \in \{2, 3\}$). Zeigen Sie:
(a) $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \perp (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
(b) ist $\mathbf{v} \neq o$ und $\mathbf{w} \neq o$, so gilt

$$\left\| \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} - \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2} \right\| = \frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|}.$$

Zusatz: Interpretieren Sie (a) für $\mathbb{R}^2$ geometrisch.

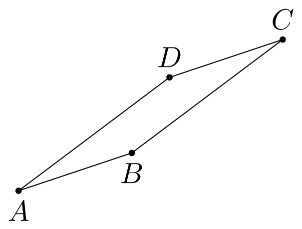
Lösung:
(a) Zunächst gilt

$$\langle \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2.$$

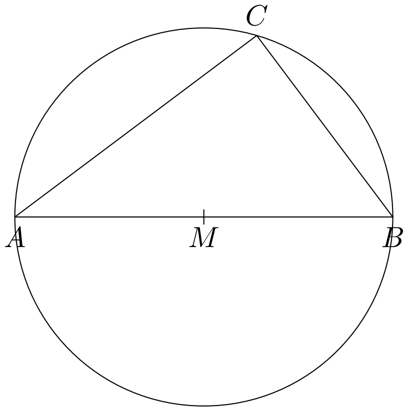
Damit erhalten wir

$$(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \perp (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \iff \langle \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = 0 \iff \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{w}\|^2 \overset{\|\mathbf{v}\|,\|\mathbf{w}\| \geq 0}{\iff} \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\|.$$

Geometrische Interpretationen:
1. Es sei P ein Parallelogramm mit Eckpunkten A, B, C, D:



Wir setzen $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ und $\mathbf{w} = \overrightarrow{AD}$. Dann ist $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \overrightarrow{AC}$ und $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \overrightarrow{DB}$. Also sind $\mathbf{v} \pm \mathbf{w}$ die Richtungsvektoren der Diagonalen des Parallelogramms. Die Bedingung $(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \perp (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ bedeutet also, dass die Diagonalen normal aufeinander stehen. Die Bedingung $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\|$ bedeutet, dass $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ gleich lang sind, also dass das Parallelogramm eine Raute ist. Damit erhalten wir das Resultat: ein Parallelogramm ist genau dann eine Raute, wenn die Diagonalen normal aufeinander stehen.
2. Es seien A, B zwei verschiedene Punkte in der Ebene und M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Weiters sei C ein Punkt der Ebene der nicht auf der Geraden durch A und B liegt. Dann sind A, B, C Ecken eines Dreiecks D. Weiters sei K der Kreis mit Durchmesser $\overline{AB}$.



Wir setzen $v = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA}$ und $w = \overrightarrow{MC}$. Dann ist die Bedingung $\|v\| = \|w\|$ äquivalent zu $C \in K$. Wegen

$$v + w = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC}, \quad v - w = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA}$$

bedeutet $v + w \perp v - w$, dass das Dreieck D rechtwinklig bei C ist. Damit erhalten wir: D ist genau dann rechtwinkelig bei C, wenn C auf dem Kreis mit Durchmesser $\overline{AB}$ liegt. Dies ist der Satz von Thales und seine Umkehrung.

(b) Zunächst beachte man

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}\rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle = \|\mathbf{a}\|^2 - 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle + \|\mathbf{b}\|^2 \qquad (1)$$

für alle $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$. Damit erhalten wir

$$\left\| \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} - \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2} \right\|^2 \overset{(1) \text{ mit } \substack{\mathbf{a}=\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \\ \mathbf{b}=\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}}}{=} \left\| \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \right\|^2 - 2\langle \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}, \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\rangle + \|\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\|^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2} \|\mathbf{v}\| \right)^2 - \frac{2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle}{\|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{w}\|^2} + \left(\frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} \|\mathbf{w}\| \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2} - \frac{2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle}{\|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{w}\|^2} + \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} = \frac{\|\mathbf{w}\|^2 - 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2}{\|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{w}\|^2} =$$

$$\overset{(1) \text{ mit } \substack{\mathbf{a}=\mathbf{v} \\ \mathbf{b}=\mathbf{w}}}{=} \frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2}{\|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{w}\|^2} = \left(\frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|} \right)^2.$$

Wegen

$$\left\| \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} - \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2} \right\|, \quad \frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|} \geq 0$$

folgt daraus

$$\left\| \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} - \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2} \right\| = \frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|}.$$

Aufgabe 19

Es sei $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Es seien weiters $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ zwei linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Beweisen Sie, dass es ein $i \in \{1, 2, 3\}$ gibt, so dass $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{e}_i$ linear unabhängig sind.

Lösung:

Wir machen einen Widerspruchsbeweis, nehmen also an, dass für alle $i = 1, 2, 3$ die Vektoren

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{e}_i$ linear abhängig sind. Wir betrachten ein $i \in \{1, 2, 3\}$. Da $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{e}_i$ linear abhängig sind, gibt es x_i, y_i, $z_i \in \mathbb{R}$, die nicht alle Null sind, mit $x_i\mathbf{a} + y_i\mathbf{b} + z_i\mathbf{e}_i = 0$. Dann ist $z_i \neq 0$ (denn sonst folgt aus $x_i\mathbf{a} + y_i\mathbf{b} = 0$ auch $x_i = y_i = 0$, da $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ linear unabhängig sind). Setzen wir $a_i = -x_i/z_i$ und $b_i = -y_i/z_i$, so erhalten wir $\mathbf{e}_i = a_i\mathbf{a} + b_i\mathbf{b}$.
Wir sehen also, dass $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ in der von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Ebene enthalten sind. Da eine Ebene im wesentlichen (genauer isomorph zu) $\mathbb{R}^2$ ist, und je drei Vektoren im $\mathbb{R}^2$ linear abhängig sind, sind $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ linear abhängig. Wir präzisieren dieses Argument: die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^2$ sind linear abhängig. Es gibt daher c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$, die nicht alle Null sind, mit

$$c_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = 0,$$

d.h.

$$c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0 = c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3. \tag{2}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3 &= c_1(a_1\mathbf{a} + b_1\mathbf{b}) + c_2(a_2\mathbf{a} + b_2\mathbf{b}) + c_3(a_3\mathbf{a} + b_3\mathbf{b}) = \\ &= (c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3)\mathbf{a} + (c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3)\mathbf{b} \overset{(2)}{=} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da nicht alle von den Zahlen c_1, c_2, c_3 Null sind, sind $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ linear abhängig, Widerspruch. Also war unsere Annahme, dass $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{e}_i$ für alle $i = 1, 2, 3$ linear abhängig sind, falsch. Daher gibt es ein $i \in \{1, 2, 3\}$, sodass $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{e}_i$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 20
Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

Lösung:
Bevor wir stur zu rechnen beginnen, schauen wir genau hin, und sehen, dass $\mathbf{u} = \mathbf{w}$ für $\lambda = 0$ gilt. Dann folgt

$$1 \cdot \mathbf{u} + 0 \cdot \mathbf{v} - 1 \cdot \mathbf{w} = 0,$$

also sind $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ in diesem Fall linear abhängig.
Wir können daher ab nun $\lambda \neq 0$ annehmen. Wir lösen jetzt wieder das Gleichungssystem

$$x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} = 0$$

(siehe auch die Lösung zu Aufgabe 16):

$$\begin{array}{ccc} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{array} \xrightarrow{-\lambda z_2 + z_1} \begin{array}{ccc} 0 & 1-\lambda^2 & -\lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{array} \xrightarrow{z_3 + z_1} \begin{array}{ccc} 0 & 2-\lambda^2 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{array} (*) \quad .$$

Jetzt wollen wir natürlich die erste Zeile durch $2 - \lambda^2$ dividieren. Das dürfen wir jedoch nur, wenn $2 - \lambda^2 \neq 0$ ist. Wir machen daher eine Fallunterscheidung.

1.Fall: $2-\lambda^2 \neq 0$. Dann fahren wir bei $(*)$ wie folgt fort (zur Erinnerung $\lambda \neq 0$):

$$(*) \quad \xrightarrow{1/(2-\lambda^2)\cdot z_1} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{matrix} \quad \xrightarrow[-z_1+z_3]{-\lambda z_1+z_2} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix} \quad \xrightarrow{1/\lambda\cdot z_3} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \xrightarrow{-z_3+z_2} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad .$$

Damit folgen $x = y = z = 0$, und somit sind $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ in diesem Fall linear unabhängig.
2.Fall: $2-\lambda^2 = 0$, d.h. $\lambda = \pm\sqrt{2}$.

$$(*) = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{matrix} \quad \xrightarrow{-\lambda z_3+z_2} \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda^2=-1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{matrix} \quad .$$

Wir sehen, dass z beliebig gewählt werden kann, und daher erhalten wir als Lösungsmenge

$$\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Setzen wir $t = 1$, so folgt

$$\mathbf{u} - \lambda\mathbf{v} + \mathbf{w} = 0,$$

also sind $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ in diesem Fall linear abhängig.

Zusammengefasst: $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $\lambda \neq 0, \pm\sqrt{2}$ gilt.