Lineare Algebra 1 (NAWI) – WS 2020/21

Übungsblatt 05 – 04.11.2020

Aufgabe 21

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^d$ eine Basis bilden:

i) $d = 2, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, ii) $d = 3, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,

iii) $d = 3, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\-2\\13\end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\-5\end{pmatrix}$,

iv) $d = 3, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}4\\6\\8\end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$.

b) Gegeben ist der Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$ in Koordinaten bezüglich der Basis $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

und Vektoren

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix},\ \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix},\ \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Stellen Sie fest, dass $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist und ermitteln Sie gleichzeitig die Koordinaten von $\mathbf{x}$ bezüglich dieser Basis.

Lösung:

a) Zunächst zur Erinnerung: Eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) besteht aus zwei (drei) linear unabhängigen Vektoren. Damit bilden die Vektoren in (ii) und (iv) keine Basis des $\mathbb{R}^3$.
i): Es ist $\mathbf{v}_2 \neq 0$ und $\mathbf{v}_1$ ist kein Vielfaches von $\mathbf{v}_2$. Daher sind $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ linear unabhängig und somit ist $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$.
iii): wir zeigen, dass diese drei Vektoren linear unabhängig sind. Dazu wählen wir λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \mathbf{v_1} + \lambda_2 \mathbf{v_2} + \lambda_3 \mathbf{v_3} = 0 \tag{1}$$

und zeigen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Die Gleichung (1) liefert die Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ -2\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & & & = & 0. \\ 13\lambda_1 & - & 3\lambda_2 & - & 5\lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

Dann folgt aus der ersten Gleichung $\lambda_1 = 0$, dann aus der zweiten (und $\lambda_1 = 0$) $\lambda_2 = 0$ und dann aus der dritten (zusammen mit $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$) auch $\lambda_3 = 0$.
Also ist $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

b) Um zu zeigen, dass $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$, d.h. dass diese Vektoren linear unabhängig sind, müssen wir zeigen, dass $(0, 0, 0)$ die einige Lösung der Gleichung

$$\lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 + \lambda_3 \mathbf{b}_3 = 0 \tag{2}$$

ist. Um dann die Koordinaten von $\mathbf{x}$ bezüglich $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ zu bestimmen, müssen wir die Gleichung

$$\lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 + \lambda_3 \mathbf{b}_3 = \mathbf{x} \tag{3}$$

lösen. Die beiden Gleichungen (2), (3) liefern Gleichungssysteme, deren linken Seiten identisch sind. Wir können Sie daher simultan lösen. Da im Gleichungssystem zu (2) die rechten Seiten immer 0 sind (und bleiben), müssen wir in diesem Fall die rechten Seiten nicht mitschleppen:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{array} \xrightarrow{4z_2+z_3} \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & 2 & -10 \end{array} \xrightarrow{2z_1+z_3} \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & -12 \end{array} \xrightarrow{-\frac{1}{3}z_3}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{array} \xrightarrow[-z_3+z_1]{2z_3+z_2} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{array} \xrightarrow[-z_2]{-z_1} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -5. \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}$$

Damit erhalten wir als Lösung von (2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Daher ist $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.
Als Lösung von (3) erhalten wir $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -5$ und $\lambda_3 = 5$. Damit ist

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

der Koordinatenvektor von $\mathbf{x}$ bezüglich der Basis $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

Aufgabe 22
Sei $g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3x + 4y = 5 \right\}$ eine Gerade in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $\|\overrightarrow{OP}\| \geq 1$ für jeden Punkt $P \in g$ gilt. Bestimmen Sie einen Punkt $Q \in g$ so, dass $\|\overrightarrow{OQ}\| = 1$.

Lösung:
Wir setzen $P = (x, y)$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP} = (x, y)$ und $\mathbf{w} = 1/5(3, 4)$ (das ist der normalisierte Normalvektor von g, inbesondere $\|\mathbf{w}\| = 1$). Anwendung der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung liefert:

$$\|\overrightarrow{OP}\| = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \geq |\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| = |\frac{1}{5}(3x + 4y)| \overset{P\in g}{=} |\frac{1}{5} \cdot 5| = 1.$$

Weiters wissen wir, dass in der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung genau dann Gleichheit gilt, wenn $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ linear abhängig sind. Damit $\|\overrightarrow{OP}\| = 1$ wird, müssen also $\overrightarrow{OP}$ und w linear abhängig sein. Das liefert den Ansatz

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Bedingung $(x, y) \in g$ liefert nun die Gleichung

$$\frac{\lambda}{5}(9 + 16) = 5,$$

also $\lambda = 1$. Damit ist $P = (3/5, 4/5)$ der einzige Punkt auf g mit $\|\overrightarrow{OP}\| = 1$.

Aufgabe 23
a) Sei $g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, ax + by = c \right\}$ eine Gerade in $\mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass der Vektor $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ orthogonal zu g ist.
b) Zeigen Sie: Zwei Gleichungen

$$ax + by = c \quad \text{und} \quad a'x + b'y = c'$$

beschreiben genau dann die gleiche Gerade in $\mathbb{R}^2$, wenn es ein $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt, so dass

$$(a', b', c') = \mu \cdot (a, b, c).$$

Lösung:
a) Wir kennen dieses Resultat natürlich aus der Schule. Aber was haben Sie in der Schule genau gelernt: dass dies Aussage wahr ist, oder auch warum sie wahr ist?
Damit $\mathbf{n}$ orthogonal zu g ist, muss $\mathbf{n}$ orthogonal zu einem Richtungsvektor von g sein. Um diesen Richtungsvektor zu erhalten wählen wir zwei verschiedene Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

auf g. Dann ist

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

ein Richtungsvektor von g. Aus

$$\langle \mathbf{n}, \overrightarrow{P_1P_2} \rangle = a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = -(ax_1 + by_1) + (ax_2 + by_2) \overset{P_1,P_2 \in g}{=} -c + c = 0$$

folgt die Behauptung.

b) Wir setzen

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c \right\}, \quad g' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid a'x + b'y = c' \right\}.$$

Nach Voraussetzung sind g und g' Geraden. Daher müssen $(a, b) \neq (0, 0)$ und $(a', b') \neq (0, 0)$ gelten. Unsere Aufgabe ist es die Äquivalenz

$$g = g' \iff \exists \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \colon (a', b', c') = \mu(a, b, c)$$

zu beweisen. Dazu zeigen wir (wie in den meisten Fällen) die beiden Implikationen $\Rightarrow$ und $\Leftarrow$.
$\Leftarrow$: wir nehmen also an, dass es ein $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $(a', b', c') = \mu(a, b, c)$ gibt und müssen $g = g'$ zeigen. Dazu wählen wir ein $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $(a', b', c') = \mu(a, b, c)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} g' &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid a'x + b'y = c' \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \mu(ax + by) = \mu c \right\} \overset{\mu \neq 0}{=} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c \right\} = g. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$: wir nehmen also $g = g'$ an, und müssen ein $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $(a', b', c') = \mu(a, b, c)$ finden. Nach Teil a) sind die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ orthogonal zu $g = g'$. Daher (siehe Lemma 3.11 im Skriptum von Professor Kappel) gibt es ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $(a', b') = \mu(a, b)$. Wegen $(a', b') \neq (0, 0)$ ist $\mu \neq 0$. Wir müssen jetzt nur noch $c' = \mu c$ zeigen. Dazu wählen wir uns ein beliebigen Punkt $P = (x, y)$ auf $g = g'$. Dann folgt

$$c' \overset{P \in g'}{=} a'x + b'y = \mu ax + \mu by \overset{P \in g}{=} \mu c.$$

Aufgabe 24
(Satz 3.5.b in VO) Sei $(\mathcal{P}, V)$ ein affiner Raum der Dimension 3. Weiters sei $P \in \mathcal{P}$ und V_2 ein zweidimensionaler reeller Vektorraum von Vektoren in V. Beweisen Sie, dass es genau eine Ebene E mit $P \in E$ und $V_E = V_2$ gibt, nämlich

$$E = \{X \in \mathcal{P} \mid \overrightarrow{PX} \in V_2\}.$$

Lösung:
Wir müssen einen Existenz– und einen Eindeutigkeitsbeweis führen. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Dazu sei $E \subset \mathcal{P}$ eine Ebene mit $P \in E$ und $V_E = V_2$. Wir zeigen

$$E = \{X \in \mathcal{P} \mid \overrightarrow{PX} \in V_2\}. \tag{4}$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung nur mehr von den Anfangsdaten abhängt, folgt die Eindeutigkeit. Außerdem folgt auch die mit nämlich beginnende Aussage in der Aufgabenstellung. Zunächst eine Erinnerung aus der VO:

$$V_E = \{\overrightarrow{XY} \mid X, Y \in E\}.$$

Um die Gleichung (4) zu zeigen, überlegen wir uns die beiden Inklusionen $\subset$ und $\supset$.
$\subset$: es sei $X \in E$ ein beliebiger Punkt. Dann gelten P, $X \in E$ und daher

$$\overrightarrow{PX} \in V_E = V_2.$$

Damit ist X in der rechten Seite von (4) enthalten.
$\supset$: es sei $X \in \mathcal{P}$ ein Punkt mit $\overrightarrow{PX} \in V_2$. Wegen $V_2 = V_E$ folgt $\overrightarrow{PX} \in V_E$. Wegen $P \in E$ folgt aus der Definition einer Ebene (siehe Skriptum von Professor Kappel, Definition 3.4.b).ii) auch $X \in E$. Damit ist der Eindeutigkeitsbeweis abgeschlossen.

Wir kommen zum Existenzbeweis. Wir setzen dazu

$$E = \{X \in \mathcal{P} \,|\, \overrightarrow{PX} \in V_2\}$$

und zeigen, dass E eine Ebene mit $P \in E$ und $V_E = V_2$ ist. Dazu müssen wir folgende vier Eigenschaften nachweisen:

(a) $P \in E$.
(b) $V_E = V_2$.
(c) V_E ist ein Unterraum von V.
(d) Sind $Q \in E$, $R \in \mathcal{P}$ mit $\overrightarrow{QR} \in V_E$, so gilt $R \in E$.

Beachte: c), d) zeigen, dass E eine Ebene ist, und a), b) zeigen, dass E die gewünschten Eigenschaften besitzt.
a) folgt aus $\overrightarrow{PP} = 0 \in V_2$. Zum Beweis von b) zeigen wir wieder die beiden Inklusionen $\subset$ und $\supset$.
$\subset$: Es sei $v \in V_E$. Dann gibt es $X, Y \in E$ mit $v = \overrightarrow{XY}$. Wegen $X, Y \in E$ gelten definitionsgemäß $\overrightarrow{PX}$, $\overrightarrow{PY} \in V_2$. Damit folgt aus

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XP} + \overrightarrow{PY} = -\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{PY}$$

auch $v = \overrightarrow{XY} \in V_2$.
$\supset$: Es sei $v \in V_2$ ein beliebiger Vektor. Teil (a2) der Definition eines affinen Raums (siehe Skriptum von Professor Kappel, Definition 3.1) zeigt, dass es (genau) einen Punkt $X \in \mathcal{P}$ mit $\overrightarrow{PX} = v_2$ gibt. Dann gilt definitionsgemäß $X \in E$. Wegen P, $X \in E$ folgt dann

$$v = \overrightarrow{PX} \in V_E.$$

c) folgt jetzt sofort aus b). Zum Beweis von d) seien $Q \in E$, $R \in \mathcal{P}$ mit $\overrightarrow{QR} \in V_E$. Wir müssen $R \in E$ zeigen. Wegen $V_2 = V_E$ folgt zunächst $\overrightarrow{QR} \in V_2$. Wegen $Q \in E$ gilt definitionsgemäß $\overrightarrow{PQ} \in V_2$. Daher gilt auch

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} \in V_2,$$

also $R \in E$.

Aufgabe 25
Es seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ zwei Vektoren in $\mathbb{R}^d$ mit $d \in \{2, 3\}$ und $\mathbf{w} = \|\mathbf{b}\|\mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|\mathbf{b}$. Zeigen Sie mit Hilfe des inneren Produkts, dass $\mathbf{w}$ den Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ halbiert.

Lösung:
Damit die Aussage dieser Aufgabe stimmt, müssen wir den Winkel α zwischen zwei Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$, die beide ungleich Null sind, definieren als

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}\right).$$

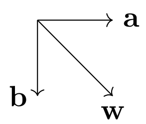
Daher ist α eindeutig bestimmt durch $\alpha \in [0, \pi]$ und

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}.$$

Sind dann λ, $\mu \in \mathbb{R}$ mit λ, $\mu > 0$, so sind die Winkeln zwischen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und zwischen $\lambda\mathbf{a}$, $\mu\mathbf{b}$ gleich, denn

$$\frac{\langle \lambda\mathbf{a}, \mu\mathbf{b}\rangle}{\|\lambda\mathbf{a}\|\|\mu\mathbf{b}\|} = \frac{\lambda\mu\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle}{|\lambda||\mu|\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|} \overset{\lambda,\mu>0}{=} \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}.$$

Vorsicht: im Skriptum von Professor Kappel, wird der Winkel zwischen zwei Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ anders definiert: dort ist es der Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$, um den man sich, von $\mathbf{a}$ startend, im Gegenuhrzeigersinn drehen muss, um $\mathbf{b}$ zu erreichen. Wir betrachten nun zum Beispiel $\mathbf{a} = (1, 0)$ und $\mathbf{b} = (0, -1)$. Dann ist $\mathbf{w} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (1, -1)$.



Es ist $\alpha = \pi/2$ und $\varphi = 3\pi/2$. Aber $\mathbf{w}$ halbiert nur α.
Zurück zur Aufgabe: wir müssen zeigen, dass der Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ doppelt so groß ist, wie der Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{w}$. Damit diese Winkeln definiert sind, müssen wir also annehmen, dass $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{w}$ ungleich Null sind.
Damit die Rechnung am Schluß etwas einfacher wird, setzen wir $\mathbf{a}' = \mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$ und $\mathbf{b}' = \mathbf{b}/\|\mathbf{b}\|$. Dann gelten $\|\mathbf{a}'\| = \|\mathbf{b}'\| = 1$. Dann sind die Winkeln zwischen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ gleich. Setzen wir

$$\mathbf{w}' = \|\mathbf{b}'\|\mathbf{a}' + \|\mathbf{a}'\|\mathbf{b}' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}'$$

so folgt

$$\mathbf{w} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\left(\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} + \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}\right) = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|(\mathbf{a}' + \mathbf{b}') = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\mathbf{w}'.$$

Daher ist der Winkel zwischen $\mathbf{a}$, $\mathbf{w}$ gleich dem Winkel zwischen $\mathbf{a}'$ und $\mathbf{w}'$. Ersetzen wir daher $\mathbf{a}$ durch $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}$ durch $\mathbf{b}'$ (und damit $\mathbf{w}$ durch $\mathbf{w}'$), so können wir $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$ und $\mathbf{w} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ annehmen.
Es sei nun α der Winkel zwischen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und β derjenige zwischen $\mathbf{a}$, $\mathbf{w}$. Dann folgt also

$$\cos(\beta) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}\rangle}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|} = \frac{\|\mathbf{a}\|^2 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|} = \frac{1 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle}{\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|}. \tag{5}$$

Anwendung der Cauchy–Schwarzen Ungleichung liefert

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle| \leq \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| = 1.$$

Daher gilt $1 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle \geq 0$ und damit auch

$$\cos(\beta) = \frac{1 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle}{\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|} \geq 0.$$

Daher gilt $\beta \in [0, \pi/2]$ und damit $2\beta \in [0, \pi]$. Um $\alpha = 2\beta$ zu zeigen, genügt es daher $\cos(\alpha) = \cos(2\beta)$ zu zeigen. Dazu rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
\cos(2\beta) &= \cos^2(\beta) - \sin^2(\beta) = \cos^2(\beta) - (1 - \cos^2(\beta)) = 2\cos^2(\beta) - 1 \overset{(5)}{=} \\
&= 2 \cdot \left(\frac{1 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{1 + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2}{\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle} - 1 = \\
&= 2 \cdot \frac{1 + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2}{\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} - 1 = 2 \cdot \frac{1 + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2}{2 + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} - 1 = \\
&= \frac{2 + 4\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 - 2 - 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{2(1 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle)} = \frac{2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle(1 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle)}{2(1 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = \\
&= \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|} = \\
&= \cos(\alpha).
\end{aligned}$$

Eine andere Lösung dieser Aufgabe sieht so aus: Es genügt zu zeigen, dass die Winkel zwischen $\mathbf{a}$, $\mathbf{w}$ und zwischen $\mathbf{b}$, $\mathbf{w}$ gleich sind, denn der Winkel zwischen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ist die Summe der Winkeln zwischen $\mathbf{a}$, $\mathbf{w}$ und zwischen $\mathbf{w}$, $\mathbf{b}$. Dazu rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{w}\|} &= \frac{\langle \mathbf{a}, \|\mathbf{b}\|\mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|\mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{w}\|} = \frac{\|\mathbf{b}\|\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \|\mathbf{a}\|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{w}\|} = \frac{\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{a}\|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{w}\|} \\
&= \frac{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\|\mathbf{b}\|\mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|\mathbf{b}\|}.
\end{aligned}$$

Nun beachte, dass der letzte Term sich nicht ändert, wenn man $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ vertauscht. Damit folgt

$$\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{w}\|} = \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{b}\|\|\mathbf{w}\|}.$$

Also ist der Winkel zwischen $\mathbf{a}$, $\mathbf{w}$ gleich dem Winkel zwischen $\mathbf{b}$, $\mathbf{w}$.
Frage: wo in in dieser zweiten Lösung haben wir ein Argument verwendet, das im Bild klar ist, aber eigentlich eines Beweises bedarf?