Lineare Algebra 1 (NAWI) – WS 2020/21

Übungsblatt 06 – 11.11.2020

Aufgabe 26 (a) Sind die vier Punkte $P_1, \ldots, P_4$ mit folgenden affinen Koordinaten komplanar? Bestimmen Sie gegebenfalls eine Ebene welche die Punkte enthält.

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OP_3} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OP_4} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}.$$

(b) Finden Sie vier *nicht*-kollineare Punkte $Q_1, \ldots, Q_4$ in der Ebene für die gilt: es gibt $\alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in \mathbb{R}$, nicht sämtliche verschwindend, mit

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \overrightarrow{OQ_i} = 0.$$

Lösung:
a) Aus der Angabe folgt $P_1 = P_3$. Da je drei Punkte komplanar sind, sind $P_1, \ldots, P_4$ komplanar. Zur Übung wollen wir ein weniger triviales Beispiel rechnen. Wir nehmen dazu P_1, P_2, P_4 wie in der Angabe und ersetzen P_3 durch

$$\overrightarrow{OP_3} = \begin{pmatrix}0\\-1\\11\end{pmatrix}.$$

Wir wollen zweigen, dass jetzt $P_1, \ldots, P_4$ ebenfalls komplanar sind. Dazu verwenden wir Satz 3.10 b) im Skriptum von Professor Kappel. Wir müssen also $\alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in \mathbb{R}$, die nicht alle gleich Null sind, finden, sodass

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$$

und

$$\alpha_1\overrightarrow{OP_1} + \alpha_2\overrightarrow{OP_2} + \alpha_3\overrightarrow{OP_3} + \alpha_4\overrightarrow{OP_4} = o$$

gelten. Dies liefert ein Gleichungssystem für die α_k, das wir nun lösen:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 11 & 3 \end{matrix} \xrightarrow[-z_2+z_4]{\substack{-z_2+z_1\\-2z_2+z_3}} \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & 11 & 1 \end{matrix} \xrightarrow[-5z_1+z_4]{-z_1+z_3} \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{matrix} \xrightarrow{-1/2z_3}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{matrix} \xrightarrow[-6z_3+z_4]{-z_3+z_1} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}.$$

Wir erhalten nun

$$\alpha_1 = -2\alpha_4, \quad \alpha_2 = 2\alpha_4, \quad \alpha_3 = -\alpha_4 \quad .$$

Wir können also α_4 beliebig wählen. Setzen wir $\alpha_4 = 1$, so sehen wir, dass $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (-2, 2, -1, 1)$ ein Tupel mit den gewünschten Eigenschaften ist. Daher sind $P_1, \ldots, P_4$ komplanar.
Wir bestimmen noch eine Ebene E, die $P_1, \ldots, P_4$ enthält. Dazu berechnen wir zunächst

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\10\end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass $\overrightarrow{P_1P_2}$ kein Vielfaches von $\overrightarrow{P_1P_3}$ ist (und $\overrightarrow{P_1P_3} \neq o$). Daher sind $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_1P_3}$ linear unabhängig. Somit ist

$$W := \left\{\lambda\overrightarrow{P_1P_2} + \mu\overrightarrow{P_1P_3} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$$

ein 2–dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^3$ und

$$E = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{P_1X} \in W\}$$

ist die einzige Ebene, die $P_1,\ldots, P_3$ enthält. Da $P_1,\ldots,P_4$ komplaner sind, ist E auch die einzige Ebene, die $P_1,\ldots, P_4$ enthält.

b) Wir nehmen irdendwelche Punkte $Q_1,\ldots, Q_4$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$, die nicht auf einer Geraden liegen, zum Beispiel die vier Eckpunkte eines Quadrats. Dann sind $Q_1,\ldots, Q_4$ nicht kolinear, aber (da sie in der Ebene $\mathbb{R}^2$ liegen) komplanar. Alos gibt es nach Satz 3.10 b) im Skriptum von Professor Kappel, $\alpha_1,\ldots, \alpha_4$, nicht alle Null, mit

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{4} \alpha_i\overrightarrow{OQ_i} = o.$$

Aufgabe 27
Es seien P, P', Q, Q' die Ecken eines Vierecks $PQQ'P'$. Beweisen Sie, dass dieses Viereck genau dann ein Parallelogram ist, wenn sich seine Diagonalen halbieren, d.h., es gilt

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} \quad\Longleftrightarrow\quad \overrightarrow{OP} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{OQ} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{QP'}.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{OQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QP'} \iff \\
&\overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OQ} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OQ}) \iff \\
&\frac{1}{2}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OP'} \iff \\
&\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP'} \iff \\
&\overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \iff \\
&\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 28
Es seien

$$g_1 = \left\{\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\right\}, \qquad g_2 = \left\{\begin{pmatrix}-5\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\5\\-4\end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

(a) Bestimmen Sie einen Vektor $\mathbf{n}$, der normal auf g_1 und g_2 steht.
(b) Bestimmen Sie den Abstand zwischen den beiden Geraden g_1 und g_2, d.h., bestimmen Sie $\min\{\|\overrightarrow{PQ}\| : P \in g_1, Q \in g_2\}$.

Lösung:
a) Eine triviale Wahl von $\mathbf{n}$ wäre $\mathbf{n} = o$. Um auch einen nicht trivialen, gesuchten Vektor $\mathbf{n}$ anzugeben, machen wir den Ansatz

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \quad .$$

Dann steht $\mathbf{n}$ genau dann normal auf g_1 und g_2, wenn die Gleichungen

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = a - 2b + c, \quad 0 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = 5b - 4c$$

erfüllt sind. Addieren wir ein Viertel der zweiten Gleichung zur ersten, erhalten wir das äquivalente Gleichungssystem

$$a = \frac{3}{4}b, \quad c = \frac{5}{4}b.$$

Wir können daher (zum Beispiel) $b = 4$ setzen und erhalten

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

b) Zur Abwechslung eine Lösung, die sich von der, auf der Tafel gerechneten Lösung, etwas unterscheidet.
Angenommen wir haben Punkte $P \in g_1$, $Q \in g_2$, sodass der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ normal auf g_1 und g_2 steht. Wir zeigen, dann

$$\|\overrightarrow{P'Q'}\| \geq \|\overrightarrow{PQ}\|$$

für alle $P' \in g_1$ und alle $Q' \in g_2$. Dann folgt

$$\text{Abstand zwischen } g_1 \text{ und } g_2 \; = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Es seien dazu $P' \in g_1$ und $Q' \in g_2$ beliebig. Dann folgt

$$\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{PQ}.$$

Wegen P, $P' \in g_1$ und da $\overrightarrow{PQ}$ normal auf g_1 steht, steht $\overrightarrow{PQ}$ auch normal auf $\overrightarrow{P'P}$. Ein analoges Argument zeigt, dass $\overrightarrow{PQ}$ auch normal auf $\overrightarrow{QQ'}$ steht. Dann steht $\overrightarrow{PQ}$ auch normal auf $\overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{QQ'}$, denn

$$\langle \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{QQ'}, \overrightarrow{PQ} \rangle = \langle \overrightarrow{P'P}, \overrightarrow{PQ} \rangle + \langle \overrightarrow{QQ'}, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0 + 0 = 0.$$

Damit erhalten wir (Pythagoras)

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{P'Q'}\|^2 &= \|\overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{QQ'}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{QQ'}, \overrightarrow{PQ} \rangle + \|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \\ &= \|\overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{QQ'}\|^2 + \|\overrightarrow{PQ}\|^2 \geq \|\overrightarrow{PQ}\|^2 \end{aligned}$$

und damit (da Normen immer positiv sind) $\|\overrightarrow{P'Q'}\| \geq \|\overrightarrow{PQ}\|$.
Wir müssen also nur noch $P \in g_1$ und $Q \in g_2$ finden, sodass $\overrightarrow{PQ}$ normal auf g_1 und g_2 steht. Dazu machen wir den Ansatz

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

mit λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\overrightarrow{PQ} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda - 5 \\ 5\mu + 2\lambda - 2 \\ -4\mu - \lambda + 4 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Die Bedingung, dass $\overrightarrow{PQ}$ normal auf g_1 und g_2 steht, liefert die beiden Gleichungen

$$0 = \langle \overrightarrow{PQ}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \overrightarrow{PQ}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \rangle,$$

also das Gleichungssystem

$$-6\lambda - 14\mu = -3, \quad 14\lambda + 41\mu = 26.$$

Zur Lösung dieses Gleichungssystems rechnen wir wie üblich:

$$\begin{matrix} -6 & -14 & -3 \\ 14 & 41 & 26 \end{matrix} \xrightarrow{-\frac{1}{6}z_1} \begin{matrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{2} \\ 14 & 41 & 26 \end{matrix} \xrightarrow{-14z_1+z_2} \begin{matrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{25}{3} & 19 \end{matrix} \xrightarrow{\frac{3}{25}z_2} \begin{matrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{57}{25} \end{matrix} \xrightarrow{-\frac{7}{3}z_2+z_1}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -\frac{241}{50} \\ 0 & 1 & \frac{57}{25} \end{matrix}.$$

Also ist $\lambda = -241/50$ und $\mu = 57/25$. Setzen wir dies in (1), so ergibt eine kurze Rechnung

$$\overrightarrow{PQ} = -\frac{3}{50} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

und damit

$$\text{Abstand zwischen } g_1 \text{ und } g_2 \ = \|\overrightarrow{PQ}\| = \frac{3}{50} \cdot \sqrt{50}.$$

Aufgabe 29

Es seien A, B, C die Eckpunkte eines Dreiecks ABC. Der *Schwerpunkt* von ABC ist nach Definition der Punkt S mit Ortsvektor $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Zeigen Sie:

(a) Je zwei Seitenhalbierende sind nicht parallel.

(b) S ist der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden.

(c) Es gilt $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = o$.

Lösung:

a) Da A, B, C die Ecken eines Dreiecks sind, liegen diese drei Punkte nicht auf einer Geraden und sind insbesondere paarweise verschieden. Es folgt, dass $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ linear unabhängig sind (sonst wäre C in der Geraden durch A und B enthalten).

Per Definition ist die Seitenhalbierende s_A durch A diejenige Gerade, die A und den Mittelpunkt $M_{B,C}$ von $\overline{BC}$ enthält. Wir erhalten daher, dass $\overrightarrow{AM_{B,C}}$ ein Richtungsvektor von s_A ist (beachte auch $A \neq M_{B,C}$, da $M_{B,C}$ auf der Geraden durch B und C liegt, A aber nicht). Analog (in ähnlichen Bezeichnungen) ist $\overrightarrow{BM_{A,C}}$ ein Richtungsvektor der Seitenhalbierenden s_B durch B. Wir zeigen, dass s_A und s_B nicht parallel sind. Wenn wir dann die Ecken umbenennen, folgt, dass je zwei Seitenhalbierende nicht parallel sind.

Wir machen dazu einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen also an, dass s_A und s_B parallel sind, und müssen einen Widerspruch herleiten. Da s_A und s_B parallel sind, gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\overrightarrow{AM_{B,C}} = \lambda\overrightarrow{BM_{A,C}}$. Wir schreiben nun die beiden Vektoren $\overrightarrow{AM_{B,C}}$, $\overrightarrow{BM_{A,C}}$ als Linearkombination von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Wegen $\overrightarrow{BM_{B,C}} = 1/2 \cdot \overrightarrow{BC}$ gilt

$$\overrightarrow{AM_{B,C}} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM_{B,C}} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}. \qquad (2)$$

Wegen $\overrightarrow{AM_{A,C}} = 1/2 \cdot \overrightarrow{AC}$ gilt

$$\overrightarrow{BM_{A,C}} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM_{A,C}} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Aus $\overrightarrow{AM_{B,C}} = \lambda\overrightarrow{BM_{A,C}}$ folgt nun

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\lambda\overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Da $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ linear unabhängig sind, erhalten wir $\lambda = -1/2$ und $\lambda = 1$. Also ist $1 = -1/2$, Widerspruch.
b). Da je zwei verschiedene Seitenhalbierende nicht parallel sind, schneiden sich zwei verschiedene Seitenhalbierende in genau einem Punkt. Es folgt, dass der Schnitt aller drei Seitenhalbierenden leer ist oder aus genau einem Punkt besteht. Wir zeigen, dass S auf jeder Seitenhalbierenden liegt. Dann folgt, dass S der (einzige) Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden ist.
Es genügt dazu zu zeigen, dass S auf der Seitenhalbierenden s_A liegt. Wir müssen dazu $\overrightarrow{AS} \in \mathbb{R}\overrightarrow{AM_{B,C}}$ zeigen. Dazu rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AS} &= \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\Big((\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})\Big) = \\ &= \frac{2}{3}\Big(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\Big) \overset{(2)}{=} \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_{B,C}} \in \mathbb{R}\overrightarrow{AM_{B,C}}.\end{aligned}$$

c) Dies ist eine einfache Rechnung:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OS} = o.$$

Aufgabe 30 (a) Bestimmen Sie eine Ebene, die den Punkt mit affinen Koordinaten $(1, -1, 3)$ sowie die Gerade

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

enthält. Gibt es mehrere Möglichkeiten?

(b) Gibt es eine Ebene, welche die folgenden beiden Geraden enthält? Falls ja, bestimmen Sie die Ebene.

$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \qquad g_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Lösung:
a) Wir setzen

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Es sei E eine beliebige Ebene im $\mathbb{R}^3$. Dann haben wir die folgenden Äquivalenzen:

$$P \in E \wedge g \subset E \iff P \in E \wedge Q \in E \wedge \mathbf{v} \in V_E \iff P \in E \wedge \overrightarrow{PQ}, \mathbf{v} \in V_E.$$

Nun gilt

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass $\overrightarrow{PQ}$ kein Vielfaches von $\mathbf{v}$ ist, und daher sind $\overrightarrow{PQ}$ und $\mathbf{v}$ linear unabhängig. Es folgt, dass

$$W := \{\lambda\overrightarrow{PQ} + \mu\mathbf{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

ein 2–dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist. Daher gilt

$$\overrightarrow{PQ}, \mathbf{v} \in V_E \iff W = V_E.$$

Damit folgt weiter

$$P \in E \wedge g \subset E \iff P \in E \wedge V_E = W.$$

Also ist

$$\{X \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{PX} \in W\}$$

die einzige Ebene, die P und g enthält.

b) Wir überlegen uns zunächst, dass sich g_1 und g_2 in einem Punkt S schneiden. Dazu müssen wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

lösen:

$$\begin{matrix} 2 & 5 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{matrix} \xrightarrow[3z_2+z_3]{2z_2+z_1} \begin{matrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \end{matrix} \xrightarrow[-z_2]{\frac{1}{3}z_1} \begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \end{matrix} \xrightarrow[5z_1+z_3]{-z_1+z_2} \begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}.$$

Wir erhalten als einzige Lösung $(\lambda, \mu) = (1, -1)$. Damit ist

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

der (einzige) Schnittpunkt von g_1 und g_2. Damit erhalten wir

$$g_1 = \left\{ S + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \qquad g_2 = \left\{ S + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir setzen noch

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\mathbf{v}_1$ kein Vielfaches von $\mathbf{v}_2$ und daher sind $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ linear unabhängig. Wir definieren

$$W = \{\lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2 \mid \lambda\mu \in \mathbb{R}\}.$$

Dann ist W ein 2–dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^3$.
Für jede Ebene E im $\mathbb{R}^3$ erhalten wir nun

$$g_1 \subset E \wedge g_2 \subset E \iff S \in E \wedge \mathbf{v_1}, \mathbf{v}_2 \in V_E \iff S \in E \wedge V_E = W.$$

Also ist

$$\{X \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{SX} \in W\}$$

die einzige Ebene, die g_1 und g_2 enthält.