Lineare Algebra 1 (NAWI) – WS 2020/21

Übungsblatt 07 – 18.11.2020

Aufgabe 31
Stellen Sie fest, ob die folgenden Verknüpfungen kommutativ/assoziativ sind. Welche der folgenden Paare $(G, *)$ bilden Gruppen? Bestimmen Sie gegebenenfalls neutrale und inverse Elemente

(a) $G = \mathbb{R}$, $x * y = \min\{x, y\}$,
(b) $G = \mathbb{R}$, $x * y = x + y - 1$,
(c) $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $x * y = x + y + xy$.

Lösung:
(a) Wegen $\{x, y\} = \{y, x\}$ für alle x, $y \in \mathbb{R}$ ist $*$ kommutativ. Für den Beweis der Assoziativität von $*$ überlegen wir uns zunächst

$$\min\{x, y, z\} = \min\{\min\{x, y\}, z\}$$

für alle x, y, $z \in \mathbb{R}$ (wie in der Lösung an der Tafel angedeutet, ist dies anschaulich klar). Es seien also x, y, $z \in \mathbb{R}$. Wir setzen $m = \min\{\min\{x, y\}, z\}$. Dann gilt $m = \min\{x, y\}$ oder $m = z$, also $m = x$ oder $m = y$ oder $m = z$. Wir sehen damit $m \in \{x, y, z\}$. Weiters gelten

$$m = \min\{\min\{x, y\}, z\} \leq \min\{x, y\} \quad \text{und} \quad m = \min\{\min\{x, y\}, z\} \leq z.$$

Wegen $\min\{x, y\} \leq x$ und $\min\{x, y\} \leq y$ folgen

$$m \leq x, \quad m \leq y \quad m \leq z.$$

Diese drei Ungleichungen und $m \in \{x, y, z\}$ implizieren nun $m = \min\{x, y, z\}$.
Nun zum Beweis der Assoziativität von $*$: es seien x, y, $z \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= \min\{\min\{x, y\}, z\} = \min\{x, y, z\} = \min\{y, z, x\} = \\ &= \min\{\min\{y, z\}, x\} = \min\{x, \min\{y, z\}\} = \\ &= x * (y * z).\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass $(\mathbb{R}, *)$ kein neutrales Element besitzt. Dazu sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass die Aussage

$$\forall y \in \mathbb{R}\colon x * y = y$$

falsch ist, d.h. wir müssen ein $y \in \mathbb{R}$ mit $x * y \neq y$ finden. Dazu setzen wir $y = x + 1$. Dann gilt

$$x * y = \min\{x, x + 1\} = x \neq x + 1 = y.$$

(b), (c) Wir können die Definition von $*$ folgendermaßen umschreiben:

$$\text{(b):} \quad x * y = [(x - 1) + (y - 1)] + 1, \quad \text{(c):} \quad x * y = [(x + 1)(y + 1)] - 1. \tag{1}$$

Wir können dies noch anders formulieren: im Fall (b) sei $(H, \circ) = (\mathbb{R}, +)$ (eine abelsche Gruppe) und

$$\varphi\colon G \longrightarrow H, \quad x \mapsto x - 1.$$

Im Fall (c) sei $(H, \circ) = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ (wieder ein abelsche Gruppe) und

$$\varphi\colon G \longrightarrow H, \quad x \mapsto x + 1.$$

Dann ist in beiden Fällen φ bijektiv und es gelten

$$\text{(b):} \quad \varphi^{-1}\colon H \longrightarrow G, \quad a \mapsto a + 1, \quad \text{(c):} \quad \varphi^{-1}\colon H \longrightarrow G, \quad a \mapsto a - 1.$$

Weiters zeigt (1), dass in beiden Fällen

$$x * y = \varphi^{-1}(\varphi(x) \circ \varphi(y)) \tag{2}$$

für alle x, $y \in G$ gelten (inbesondere sehen wir, dass $*$ in (c) wirklich eine Verknüpfung auf G ist).
Wir zeigen nun, dass $(G, *)$ eine abelsche Gruppe ist (also insbesondere, dass $*$ kommutativ und assoziativ ist). Dazu verwenden wir:

$$\forall h, h' \in H \colon \varphi^{-1}(h \circ h') = \varphi^{-1}(h) * \varphi^{-1}(h'), \tag{3}$$

denn für beliebige h, $h' \in H$ gelten

$$\varphi^{-1}(h) * \varphi^{-1}(h') \overset{(2)}{=} \varphi^{-1}\left(\varphi(\varphi^{-1}(h)) \circ \varphi(\varphi^{-1}(h')\right) = \varphi^{-1}(h \circ h').$$

$*$ ist kommutativ: es seien x, $y \in G$ beliebig. Dann gilt $x = \varphi^{-1}(h)$, $y = \varphi^{-1}(h')$ mit (eindeutig bestimmten) h, $h' \in H$. Es folgt

$$x * y = \varphi^{-1}(h) * \varphi^{-1}(h') \overset{(3)}{=} \varphi^{-1}(h \circ h') \overset{\circ \text{ist komm.}}{=} \varphi^{-1}(h' \circ h) \overset{(3)}{=} \varphi^{-1}(h') * \varphi^{-1}(h) = y * x.$$

$*$ ist assoziativ: Es seien x, y, $z \in G$. Dann gelten wieder $x = \varphi^{-1}(h)$, $y = \varphi^{-1}(h')$, $z = \varphi^{-1}(h'')$ mit h, h', $h'' \in H$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= \left(\varphi^{-1}(h) * \varphi^{-1}(h')\right) * \varphi^{-1}(h'') \overset{\text{zwei mal } (3)}{=} \varphi^{-1}\left((h \circ h') \circ h''\right) \overset{\circ \text{ist ass.}}{=} \\ &= \varphi^{-1}(h \circ (h' \circ h'')) \overset{\text{zwei mal } (3)}{=} \varphi^{-1}(h) * \left(\varphi^{-1}(h') * \varphi^{-1}(h'')\right) = \\ &= x * (y * z).\end{aligned}$$

$*$ besitzt ein neutrales Element: es sei e_H das neutrale Element von $(H, \circ)$, also $e_H = 0$ im Fall (b) und $e_H = 1$ im Fall (c). Wir setzen

$$e = \varphi^{-1}(e_H) = \begin{cases} 1 & \text{im Fall (b)} \\ 0 & \text{im Fall (c)} \end{cases}$$

und zeigen, dass e ein neutrales Eleemnt von G ist. Da wir schon wissen, dass $(G, *)$ kommutativ ist, genügt es dazu $x * e = x$ für alle $x \in G$ zu zeigen. Es also $x \in G$. Wir schreiben wieder $x = \varphi^{-1}(h)$ mit $h \in H$. Dann folgt

$$x * e = \varphi^{-1}(h) * \varphi^{-1}(e_H) \overset{(3)}{=} \varphi^{-1}(h \circ e_H) = \varphi^{-1}(h) = x.$$

$*$ besitzt Inverse: es sei $x \in G$ beliebig, $x = \varphi^{-1}(h)$ mit

$$h = \varphi(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{im Fall (b)} \\ x + 1 & \text{im Fall (c)} \end{cases} \in H.$$

Es sei $h' \in H$ das Inverse von h in $(H, \circ)$ also

$$h' = \begin{cases} -h = -x + 1 & \text{im Fall (b)} \\ \frac{1}{h'} = \frac{1}{x+1} & \text{im Fall (c)} \end{cases}.$$

Wir setzen $y = \varphi^{-1}(h')$, also

$$y = \begin{cases} -x + 2 & \text{im Fall (b)} \\ \frac{1}{x+1} - 1 & \text{im Fall (c)} \end{cases}$$

und zeigen, dass y ein Inverses von x in $(G, *)$ ist. Da $(G, *)$ kommutativ ist, genügt es dazu $x * y = e$ zu beweisen:

$$x * y = \varphi^{-1}(h) * \varphi^{-1}(h') \overset{(3)}{=} \varphi^{-1}(h \circ h') = \varphi^{-1}(e_H) = e.$$

Aufgabe 32
(a) Sei $(G, *)$ eine Gruppe mit $a * a = e$ für alle $a \in G$, wobei e das neutrale Element von G bezeichnet. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

(b) Sei $(G, *)$ eine Gruppe mit endlich vielen Elementen und neutralem Element e. Zeigen Sie, dass es zu jedem $a \in G$ ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gibt, für das gilt $e = a^n := \underbrace{a * a * \cdots * a}_{n\text{-mal}}$.

Lösung:
(a) Es sei zunächst $(G, *)$ eine beliebige Gruppe mit neutralem Element e. Für $a \in G$ sei a^{-1} das Inverse von a in $(G, *)$. Dann gilt für alle a, $b \in G$:

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}. \tag{4}$$

Denn sind a, $b \in G$ beliebig, so gilt

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * (b^{-1} * b) * a^{-1} = a * e * a^{-1} = a * a^{-1} = e.$$

Multiplikation dieser Gleichung von links mit $(a * b)^{-1}$ liefert (4).
Es gelte nun $a * a = e$ für alle $a \in G$. Dann folgt $a = a^{-1}$ für alle $a \in G$. Sind nun a, $b \in G$ beliebig, so folgt

$$a * b = (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1} = b * a.$$

Daher ist $(G, *)$ kommutativ.
(b) Es sei $a \in G$ beliebig. Wir betrachten die Abbildung

$$f \colon \mathbb{N} \longrightarrow G, \quad n \mapsto a^n.$$

Da $\mathbb{N}$ unendlich und G endlich ist, ist f nicht injektiv. Es gibt daher m, $n \in \mathbb{N}$ mit $a^m = f(m) = f(n) = a^n$ und $m \neq n$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $m > n$ ist. Dann folgt

$$a^n = a^m = \underbrace{a * a * \cdots * a}_{m\text{-mal}} = \underbrace{a * a * \cdots * a}_{n\text{-mal}} * \underbrace{a * a * \cdots * a}_{(m-n)\text{-mal}} = a^n * a^{m-n}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung von links mit $(a^n)^{-1}$ so folgt $a^{m-n} = e$. Wegen $m > n$ ist $m - n \in \mathbb{N}$ (also $m - n \neq 0$).

Aufgabe 33
Betrachten Sie $F = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ mit den entsprechenden Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ in $\mathbb{R}$. Welche Körperaxiome sind erfüllt? Ist $(F, +, \cdot)$ ein Körper?

Lösung:
Wir zeigen zunächst, dass F bezüglich $+$, $\cdot$ und Negativen abgeschlossen ist und dass 0, $1 \in F$ gelten. Es seien dazu x, $y \in F$ beliebig, etwa $x = a + b\sqrt{5}$, $y = c + d\sqrt{5}$ mit a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$. Dann folgen

$$\begin{aligned} x + y &= (a + c) + (b + d)\sqrt{5} \in F \\ xy &= (ac + 5bd) + (ad + bc)\sqrt{5} \in F \\ -x &= (-a) + (-b)\sqrt{5} \in F \\ 0 &= 0 + 0\sqrt{5} \in F \\ 1 &= 1 + 0\sqrt{5} \in F. \end{aligned}$$

Es folgt zunächst, dass $(F, +)$ eine abelsche Gruppe ist. Denn $+$ ist assoziativ und kommutativ auf $\mathbb{R}$ und daher auf F. Da 0 das neutrale Element von $(\mathbb{R}, +)$ ist und $0 \in F$ gilt, ist 0 das neutrale Element von $(F, +)$. Ist $x \in F$, so ist $-x$ das Inverse von x in $(\mathbb{R}, +)$ und daher (wegen $-x \in F$) das Inverse von x in $(F, +)$.

Da $\cdot$ kommutativ und assoziativ auf $\mathbb{R}$ ist, gilt dies auch auf F. Ebenso gilt für $+$ und $\cdot$ das Distributivgesetz auf $\mathbb{R}$ und daher auch auf F.
Da 1 das neutrale Element von $(\mathbb{R}, \cdot)$ ist, ist 1 auch das neutrale Element von $(F, \cdot)$.
Das einzige Körperaxiom, das noch fehlt, ist die Existenz von multiplikativen Inversen (von Elementen $\neq 0$). Dies gilt aber für F nicht (also ist $(F, +, \cdot)$ kein Körper). Zum Beispiel besitzt $0 \neq 2 = 2 + 0\sqrt{5} \in F$ kein multiplikatives Inverses, denn angenommen es sind a, $b \in \mathbb{Z}$ mit $2(a + b\sqrt{5}) = 1$. Dann folgt

$$\frac{1}{2} = a + b\sqrt{5}.$$

Ist $b \neq 0$ so erhalten wir den Widerspruch

$$\sqrt{5} = \frac{\frac{1}{2} - a}{b} \in \mathbb{Q}.$$

Ist aber $b = 0$, so ergibt sich der Widerspruch $1/2 = a \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 34
Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme

$$(a)\quad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & \overline{2}y & & & = & \overline{4} \\ \overline{3}x & + & y & + & z & = & \overline{0} \\ x & + & y & + & \overline{2}z & = & \overline{3} \end{array} \qquad (b)\quad \begin{array}{rcrcrcl} & & \overline{2}y & + & \overline{2}z & = & \overline{1} \\ \overline{2}x & + & y & & & = & \overline{1} \\ \overline{4}x & + & \overline{2}y & & & = & \overline{2} \end{array}$$

über dem Körper $\mathbb{Z}_5$.

Lösung:
(a)

$$\begin{array}{cccc|c} \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{1} \\ \overline{3} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{0} \end{array} \xrightarrow[-z_1+z_3]{-\overline{3}z_1+z_2} \begin{array}{cccc|c} \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{-5} = \overline{0} & \overline{1} & -\overline{12} = \overline{3} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{-1} = \overline{4} & \overline{2} & \overline{-1} = \overline{4} & \overline{0} \end{array} \xrightarrow{-\overline{2}z_2+z_3} \begin{array}{cccc|c} \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{0} & \overline{-2} = \overline{3} & \overline{0} \end{array} \quad (*) \quad .$$

Nun wollen wir die dritte Zeile durch $\overline{4}$ dividieren, d.h. mit $\overline{4}^{-1}$ multiplizieren. Wegen $\overline{4} \cdot \overline{4} = \overline{16} = \overline{1}$ gilt $\overline{4}^{-1} = \overline{4}$. Damit geht es nun weiter:

$$(*) \xrightarrow{\overline{4}z_3} \begin{array}{cccc|c} \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{12} = \overline{2} & \overline{0} \end{array} \xrightarrow{-\overline{2}z_3+z_1} \begin{array}{cccc|c} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} \end{array} .$$

Es folgt, dass $(\overline{0}, \overline{2}, \overline{3}) \in \mathbb{Z}_5^3$ die einzige Lösung unseres Gleichungssystem ist.

(b)

$$\begin{array}{cccc|c} \overline{0} & \overline{2} & \overline{2} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{4} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} \end{array} \xrightarrow{-\overline{2}z_2+z_3} \begin{array}{cccc|c} \overline{0} & \overline{2} & \overline{2} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{array} \quad (*) \quad .$$

Nun wollen wir die erste und die zweite Zeile durch $\overline{2}$ dividieren, d.h. mit $\overline{2}^{-1}$ multiplizieren. Wegen $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{6} = \overline{1}$ gilt $\overline{2}^{-1} = \overline{3}$. Damit erhalten wir

$$(*) \quad \begin{array}{c} \\ \overset{\overline{3}\cdot z_1}{\longrightarrow} \\ \overset{\overline{3}\cdot z_1}{\longrightarrow} \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccc} \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{3} \\ \\ \overline{1} & \overline{3} & \overline{0} & \overline{3} \\ \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{array} .$$

Unser Gleichungssystem sieht also nun so aus:

$$\begin{array}{ccccccc} & & y & + & z & = & \overline{3} \\ x & + & \overline{3}y & & & = & \overline{3} \end{array} .$$

Wir sehen, dass wir $y \in \mathbb{Z}_5$ beliebig wählen können und dass $z = \overline{3} - y = \overline{3} + \overline{4}y$ und $x = \overline{3} - \overline{3}y = \overline{3} + \overline{2}y$ gilt. Damit erhalten wir als Lösungsmenge unseres Gleichungssystems:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{3} \\ \overline{0} \\ \overline{3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \overline{2} \\ \overline{1} \\ \overline{4} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5 \right\}.$$

Aufgabe 35

Es sei V eine nicht-leere Menge mit innerer Verknüpfung + und neutralem Element 0.

a) Zeigen Sie: Ist V ein Vektorraum über $\mathbb{Z}_2$, so gilt für alle $v \in V : v + v = 0$.

b) Es sei $(V, +)$ eine abelsche Gruppe mit $v + v = 0$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass es genau eine Möglichkeit gibt, $(V, +)$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{Z}_2$ zu machen.

Lösung:

a) Es sei $v \in V$ beliebig. Dann folgt

$$v + v = \overline{1}v + \overline{1}v = \left(\overline{1} + \overline{1}\right) v = \overline{0}v = o.$$

b) Angenommen es ist $\mathbb{Z}_2 \times V \longrightarrow V$ eine Skalarmultiplikation, mit der $(V, +)$ zu einem Vektorraum wird. Dann gelten für alle $v \in V$:

$$\overline{0}v = o, \quad \overline{1}v = v. \tag{5}$$

Wegen $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ folgt, dass diese Skalarmultiplikation eindeutig bestimmt ist.
Wir definieren nun die Skalarmultiplikation durch (5) und zeigen, dass alle Vektorraumaxiome erfüllt sind. Zunächst ist nach Vorausetzung $(V, +)$ eine abelsche Gruppe.

(V1): $\forall \lambda \in \mathbb{Z}_2 \forall v, w \in V : \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$. Es seien also $\lambda \in \mathbb{Z}_2$ und v, $w \in V$. Dann folgen

$$\lambda = \overline{0} : \lambda(v + w) = \overline{0}(v + w) \overset{(5)}{=} o = o + o \overset{(5)}{=} \overline{0}v + \overline{0}w = \lambda v + \lambda w,$$

$$\lambda = \overline{1} : \lambda(v + w) = \overline{1}(v + w) \overset{(5)}{=} v + w \overset{(5)}{=} \overline{1}v + \overline{1}w = \lambda v + \lambda w.$$

(V2): $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{Z}_2 \forall v \in V : (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu w$. Es seien also λ, $\mu \in \mathbb{Z}_2$ und $v \in V$. Ist $\lambda = \overline{0}$, so folgt

$$(\lambda + \mu)v = \mu v = o + \mu v \overset{(5)}{=} \overline{0}v + \mu v = \lambda v + \mu v.$$

Analog zeigt man den Fall $\mu = \overline{0}$. Es bleibt den Fall $\lambda = \mu = \overline{1}$ zu betrachten:

$$(\lambda + \mu)v = \left(\overline{1} + \overline{1}\right) v = \overline{0}v \overset{(5)}{=} o \overset{\text{Vorauss.}}{=} v + v = \overline{1}v + \overline{1}v = \lambda v + \mu v.$$

(V3): $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{Z}_2 \forall v \in V : \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$. Es seien also λ, $\mu \in \mathbb{Z}_2$ und $v \in V$. Dann folgen

$$\lambda = \overline{0} : \lambda(\mu v) = \overline{0}(\mu v) \overset{(5)}{=} o \overset{(5)}{=} \overline{0}v = (\overline{0}\mu)v = (\lambda\mu)v$$

$$\lambda = \overline{1} : \lambda(\mu v) = \overline{1}(\mu v) \overset{(5)}{=} \mu v = (\overline{1}\mu)v = (\lambda\mu)v.$$

(V4): $\forall v \in V : \overline{1}v = v$. Dies folgt aus der Definition (5).