Lineare Algebra 1 (NAWI) – WS 2020/21

Übungsblatt 08 – 02.12.2020

Aufgabe 36
Welche der folgenden Mengen sind Unterräume der angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräume?

(a) $A = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 3x_2,\ x_3 = -x_1 \} \subseteq \mathbb{R}^3$.
(b) $B = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 0 \} \subseteq \mathbb{R}^2$.
(c) $C = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2^2 = 0 \} \subseteq \mathbb{R}^2$.
(d) $D = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq x_2 \} \subseteq \mathbb{R}^3$.
(e) $E = \{ (t, t^3) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^2$.
(f) $F = \{ (t, t+s) \in \mathbb{R}^2 : s, t \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Lösung:
(a) Es gilt

$$A = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 3x_2,\ x_3 = -x_1 \} = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 3x_2,\ x_3 = -3x_2 \} = \\ = \{ x_2(3, 1, -3) : x_2 \in \mathbb{R} \} = [(3, 1, -3)].$$

Also ist A ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.
(b) Wegen $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x_1^2 + x_2^2 = 0 \iff x_1 = x_2 = 0$ für alle x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$. Daher ist $B = \{ (0, 0) \} = 0$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$.
(c) Wegen

$$(1, 1) \in C, \quad (1, -1) \in C, \quad (1, 1) + (1, -1) = (2, 0) \notin C$$

ist C kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$.
(d) Aus

$$(2, 1, 0) \in D, \quad (-1) \cdot (2, 1, 0) = (-2, -1, 0) \notin D$$

folgt, dass D kein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ ist.
(e) Wegen

$$(1, 1) \in E, \quad 2 \cdot (1, 1) = (2, 2) \notin E$$

ist E kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$.
(f) Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$(x, y) = (x, x + (y - x)) \in F.$$

Es folgt $\mathbb{R}^2 \subset F$ und damit $F = \mathbb{R}^2$. Insbesondere ist F ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 37
Bestimmen Sie Basen von $[M] + [N]$ und $[M] \cap [N]$, für

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4 \quad \text{und} \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Lösung:
Wir setzen zur Abkürzung

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, n_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, n_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da jede Linearkombination von Elementen aus M eine Linearkombination von m_1 und m_2 ist, und natürlich auch das Umgekehrte gilt, ist

$$[M] = \{\, \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 \colon \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \,\}.$$

Analog gilt

$$[N] = \{\, \nu_1 n_1 + \nu_2 n_2 + \nu_3 n_3 \colon \nu_1, \nu_2, \nu_3 \in \mathbb{R} \,\}.$$

Aus Satz 4.28 im Skriptum von Professor Kappel erhalten wir nun

$$\begin{aligned}[M] + [N] &= \{\, m + n \colon m \in M, n \in N \,\} = \\ &= \{\, \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \nu_1 n_1 + \nu_2 n_2 + \nu_3 n_3 \colon \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, \nu_3 \in \mathbb{R} \,\},\end{aligned}$$

d.h. $[M] + [N] = [M \cup N]$.

Dies gilt ganz allgemein: Ist V ein K–Vektorraum und sind M, $N \subset V$ so gilt $[M] + [N] = [M \cup N]$.

Wir lösen nun das Gleichungssystem

$$\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \nu_1 n_1 + \nu_2 n_2 + \nu_3 n_3 = 0 \tag{1}$$

mit der Standardmethode:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow[-2z_1+z_4]{-z_1+z_3} \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -6 \end{array} \xrightarrow[-z_2+z_4]{-z_2+z_3} \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -7 \end{array} \xrightarrow{\frac{1}{2} z_3}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -7 \end{array} \xrightarrow{3z_3+z_4} \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13 \end{array} \xrightarrow{-\frac{1}{13} z_4} \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow[-3z_4+z_1]{\substack{2z_4+z_3 \\ -z_4+z_2}}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow[-z_3+z_2]{-z_3+z_2} \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

Wir sehen, dass wir $\nu_2 \in \mathbb{R}$ beliebig wählen können und erhalten als Lösungsmenge von (1)

$$\left\{ \nu_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \nu_2 \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2}$$

Wir zeigen nun, dass $B = \{m_1, m_2, n_1, n_3\}$ eine Basis von $[M] + [N] = [M \cup N]$ ist. Dazu muss $[B] = [M \cup N]$ gelten und B muss linear unabhängig sein.

Wegen $B \subset M \cup N$ ist $[B] \subset [M \cup N]$ klar. Für die umgekehrte Inklusion, setzen wir in (2) $\nu_2 = 1$ und erhalten

$$-2m_1 + 3m_2 + n_2 = 0,$$

also

$$n_2 = 2m_1 - 3m_2.$$

Ist jetzt

$$v = \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \nu_1 n_1 + \nu_2 n_2 + \nu_3 n_3$$

(μ_1, μ_2, ν_1, ν_2, $\nu_3 \in \mathbb{R}$) ein beliebiges Element von $[M] + [N] = [M \cup N] = [m_1, m_2, n_1, n_2, n_3]$, so folgt

$$\begin{aligned} v &= \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \nu_1 n_1 + \nu_2(2m_1 - 3m_2) + \nu_3 n_3 = \\ &= (\mu_1 + 2\nu_2)m_1 + (\mu_2 - 3\nu_2)m_2 + \nu_1 n_1 + \nu_3 n_3 \in [B]. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass B linear unabhängig ist. Dazu seien $\mu_1,\ \mu_2,\ \nu_1,\ \nu_3 \in \mathbb{R}$ mit $\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \nu_1 n_1 + \nu_3 n_3 = 0$. Wir müssen $\mu_1 = \mu_2 = \nu_1 = \nu_3 = 0$ zeigen. Wegen

$$\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \nu_1 n_1 + 0 \cdot n_2 + \nu_3 n_3 = 0$$

ist $(\mu_1, \mu_2, \nu_1, 0, \nu_3)$ eine Lösung von (1). Da (2) die Lösungsmenge von (1) ist, gibt es ein $\nu_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \nu_1 \\ 0 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \nu_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $\nu_2 = 0$ und damit $\mu_1 = \mu_2 = \nu_1 = \nu_3 = 0$.
Wir bestimmen noch eine Basis von $[M] \cap [N]$. Zunächst gilt $[M] \cap [N] = \{n \in [N] \colon n \in [M]\}$. Es sei nun $\nu_1 n_1 + \nu_2 n_2 + \nu_3 n_3$ ($\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3 \in \mathbb{R}$) ein beliebiges Element von $[N]$. Dann gilt genau dann $\nu_1 n_1 + \nu_2 n_2 + \nu_3 n_3 \in [M]$, wenn es $\mu_1,\ \mu_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\nu_1 n_1 + \nu_2 n_2 + \nu_3 n_3 = \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2$$

d.h.

$$(-\mu_1)m_1 + (-\mu_2)m_2 + \nu_1 n_1 + \nu_2 n_2 + \nu_3 n_3 = 0$$

gibt. Da (2) die Lösungsmenge von (1) ist, erhalten wir: $\nu_1 n_1 + \nu_2 n_2 + \nu_3 n_3 \in [M]$ genau dann, wenn es $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} -\mu_1 \\ -\mu_2 \\ \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gibt. Dies ist offensichtsichtlich zu $\nu_1 = \nu_3 = 0$ äquivalent. Damit folgt

$$[M] \cap [N] = \{\nu_2 n_2 \colon \nu_2 \in \mathbb{R}\} = [n_2].$$

Wegen $n_2 \neq 0$ ist daher $\{n_2\}$ eine Basis von $[M] \cap [N]$.

Aufgabe 38
Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\mathcal{A} := \operatorname{Abb}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) := \{\, f \mid f \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K} \,\}$ sei die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{K}$ nach $\mathbb{K}$. Für $f,\ g \in \mathcal{A}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ seien $f + g \in \mathcal{A}$ und $\lambda f \in \mathcal{A}$ definiert durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{K}.$$

Für $M \subseteq \mathbb{K}$ sei $\mathcal{A}_M := \{\, f \in \mathcal{A} \mid f(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{K} \setminus M \,\}$. Zeigen Sie:

(a) Mit den gegebenen Operationen ist $\mathcal{A}$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.
(b) Für alle $M \subseteq \mathbb{K}$ ist $\mathcal{A}_M$ ein Unterraum von $\mathcal{A}$.
(c) Für $M,\ N \subseteq \mathbb{K}$ gilt $\mathcal{A}_{M \cap N} = \mathcal{A}_M \cap \mathcal{A}_N$ und $\mathcal{A}_{M \cup N} = \mathcal{A}_M + \mathcal{A}_N$.

Für welche $M,\ N \subseteq \mathbb{K}$ gilt $\mathcal{A} = \mathcal{A}_M \oplus \mathcal{A}_N$?

Lösung:
(a) Wir müssen folgende vier Aussagen zeigen:

V0: $(\mathcal{A}, +)$ ist eine abelsche Gruppe;

V1: $\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall f, g \in \mathcal{A}\colon \lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$;
V2: $\forall \lambda,\, \mu \in \mathbb{K} \forall f \in \mathcal{A}\colon (\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu f$;
V3: $\forall \lambda,\, \mu \in \mathbb{K} \forall f \in \mathcal{A}\colon \lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$;
V4: $\forall f \in \mathcal{A}\colon 1 \cdot f = f$.

Für V0 müssen wir zeigen, dass + assoziativ und kommutativ ist, dass + ein neutrales Element besitzt und dass es bezüglich + Inverse gibt.

+ ist assoziativ: Es seien $f,\, g,\, h \in \mathcal{A}$. Wir haben $f + (g + h) = (f + g) + h$ zu zeigen. Beide Seiten sind Abbildungen $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Daher müssen wir nur $(f+(g+h))(x) = ((f+g)+h)(x)$ für jedes $x \in \mathbb{K}$ zeigen. Dazu sei $x \in \mathbb{K}$ beliebig gewählt. Dann folgt

$$(f+(g+h))(x) \overset{\text{Def. von }+}{=} f(x) + (g+h)(x) \overset{\text{Def. von }+}{=} f(x) + (g(x)+h(x)) \overset{(\mathbb{K},+)\text{ ist ass.}}{=} (f(x)+g(x)) + h(x) \overset{\text{Def. von }+}{=} (f+g)(x) + h(x) \overset{\text{Def. von }+}{=} ((f+g)+h)(x).$$

+ ist kommutativ: Es seien $f,\, g \in \mathcal{A}$. Wir müssen $f+g = g+f$ zeigen. Sei dazu $x \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann folgt

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x).$$

Da $x \in \mathbb{K}$ beliebig war, folgt $f + g = g + f$.

+ besitzt ein neutrales Element: Wir definieren $0\colon K \to K$ durch $0(x) = 0$ für alle $x \in K$. Es sei nun $f \in \mathcal{A}$. Wir zeigen $f + 0 = 0 + f = f$. Da wir schon wissen, dass + kommutativ ist, genügt es $f + 0 = f$ zu zeigen. Dazu sei $x \in \mathbb{K}$ beliebig gewählt. Dann gilt

$$(f+0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

Da $x \in \mathbb{K}$ beliebig war folgt $f + 0 = f$.

+ besitzt Inverse: Es sei $f \in \mathcal{A}$ beliebig. Wir müssen ein $g \in \mathcal{A}$ mit $f + g = g + f = 0$ finden. Wir definieren dazu $g\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ durch $g(x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{K}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{K}$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(x) + (-f(x)) = 0 = 0(x),$$

also $f + g = 0$. Da + kommutativ ist, gilt auch $g + f = 0$.

Wir kommen zum Beweis von V1. Dazu seien $\lambda \in \mathbb{K}$ und $f,\, g \in \mathcal{A}$ beliebig. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{K}$:

$$(\lambda(f+g))(x) \overset{\text{Def. Skalarmult.}}{=} \lambda(f+g)(x) = \lambda(f(x)+g(x)) \overset{\text{Distr.ges. in }K}{=} \lambda f(x) + \lambda g(x) = \overset{\text{Def. Skalarmult.}}{=} (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x) = (\lambda f + \lambda g)(x),$$

woraus $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$ folgt.

V2: Es seien $\lambda,\, \mu \in \mathbb{K}$ und $f \in \mathcal{A}$ beliebig. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{K}$:

$$((\lambda+\mu)f)(x) = (\lambda+\mu)f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x) = (\lambda f)(x) + (\mu f)(x) = (\lambda f + \mu f)(x).$$

Damit gilt $(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$.

V3: Es seien $\lambda,\, \mu \in \mathbb{K}$ und $f \in \mathcal{A}$ beliebig. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{K}$:

$$(\lambda(\mu f))(x) = \lambda(\mu f)(x) = \lambda(\mu f(x)) = (\lambda\mu)f(x) = ((\lambda\mu)f)(x),$$

woraus $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$ folgt.

V4: Es sei $f \in \mathcal{A}$ beliebig. Wegen

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt $1 \cdot f = f$.

(b) Es sei also $M \subset \mathbb{K}$ beliebig. Nach Satz 4.15 im Skriptum von Professor Kappel, müssen wir folgende drei Aussagen zeigen:

(i) $\mathcal{A}_M \neq \emptyset$;
(ii) $\forall f, g \in \mathcal{A}_M\colon f + g \in \mathcal{A}_M$;
(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}\, \forall f \in \mathcal{A}_M\colon \lambda f \in \mathcal{A}_M$.

(i) Wegen $0(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}$ und damit auch für alle $x \in \mathbb{K} \setminus M$ gilt $0 \in \mathcal{A}_M$. Insbesondere ist $\mathcal{A}_M$ nicht leer.
(ii) Es seien f, $g \in \mathcal{A}_M$ beliebig. Für alle $x \in \mathbb{K} \setminus M$ gilt dann

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0,$$

woraus $f + g \in \mathcal{A}_M$ folgt.
(iii) Wir betrachten beliebige $\lambda \in \mathbb{K}$ und $f \in \mathcal{A}_M$. Wegen

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda \cdot 0 = 0$$

für alle $x \in \mathbb{K} \setminus M$ gilt $\lambda f \in \mathcal{A}_M$.

(c) Es seien M, $N \subset \mathbb{K}$ beliebig. Wir zeigen zunächst $\mathcal{A}_{M\cap N} = \mathcal{A}_M \cap \mathcal{A}_N$. Dazu sei $f \in \mathcal{A}$ beliebig. Dann haben wir folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
f \in \mathcal{A}_{M\cap N} &\iff \forall x \in \mathbb{K} \setminus (M \cap N)\colon f(x) = 0 \overset{\text{de Morgan}}{\iff} \\
&\iff \forall x \in (\mathbb{K} \setminus M) \cup (\mathbb{K} \setminus N)\colon f(x) = 0 \iff \\
&\iff \Big(\forall x \in \mathbb{K} \setminus M\colon f(x) = 0\Big) \wedge \Big(\forall x \in \mathbb{K} \setminus N\colon f(x) = 0\Big) \iff \\
&\iff (f \in \mathcal{A}_M) \wedge (f \in \mathcal{A}_N) \iff \\
&\iff f \in \mathcal{A}_M \cap \mathcal{A}_N,
\end{aligned}$$

woraus $\mathcal{A}_{M\cap N} = \mathcal{A}_M \cap \mathcal{A}_N$ folgt.
Wir kommen zum Beweis von $\mathcal{A}_{M\cup N} = \mathcal{A}_M + \mathcal{A}_N$. Zunächst gilt

$$\mathcal{A}_M + \mathcal{A}_N = \{f + g\colon f \in \mathcal{A}_M,\, g \in \mathcal{A}_N\} \tag{3}$$

(siehe Satz 4.28 im Kappel–Skriptum). Nun gilt $M \subset M \cup N$ und daher $\mathbb{K}\setminus M \supset \mathbb{K}\setminus(M \cup N)$. Es folgt $\mathcal{A}_M \subset \mathcal{A}_{M\cup N}$ (wenn eine Funktion auf $\mathbb{K} \setminus M$ verschwindet, dann auch auf der Teilemenge $\mathbb{K}\setminus(M \cup N)$). Analog gilt $\mathcal{A}_N \subset \mathcal{A}_{M\cup N}$. Da $\mathcal{A}_{M\cup N}$ ein Unterraum von $\mathcal{A}$ ist, folgt aus (3) auch

$$\mathcal{A}_M + \mathcal{A}_N \subset \mathcal{A}_{M\cup N}.$$

Zum Beweis der anderen Inklusion sei $h \in \mathcal{A}_{M\cup N}$ beliebig. Wir definieren $f \in \mathcal{A}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{falls } x \in M \\ 0 & \text{falls } x \notin M \end{cases}.$$

Dann gilt nach Definition $f \in \mathcal{A}_M$. Wir setzen $g = h - f$. Dann gilt $h = f + g$ und wir müssen nur noch $g \in \mathcal{A}_N$ beweisen. Dazu sei $x \in \mathbb{K} \setminus N$ beliebig. Unsere Aufgabe ist es $g(x) = 0$ zu zeigen. Dazu unterscheiden wir die Fälle $x \in M$ und $x \notin M$:
$x \in M$: $g(x) = h(x) - f(x) = h(x) - h(x) = 0$.
$x \notin M$: dann gilt definitionsgemäß $f(x) = 0$. Wegen $x \notin M$ und $x \in \mathbb{K} \setminus N$ gilt dann $x \in \mathbb{K}\setminus(M \cup N)$. Da $h \in \mathcal{A}_{M\cup N}$ gilt, folgt $h(x) = 0$ und damit auch $g(x) = h(x) - f(x) = 0 - 0 = 0$.

Wir beantworten jetzt die letzte Frage der Aufgabe. Es seien M, $N \subset \mathbb{K}$. Wir zeigen, dass genau dann $\mathcal{A} = \mathcal{A}_M \oplus \mathcal{A}_N$ gilt, wenn $\mathbb{K} = M \cup N$ und $M \cap N = \emptyset$ gelten.
Nach Definition ist die Aussage $\mathcal{A} = \mathcal{A}_M \oplus \mathcal{A}_N$ äquivalent zu

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_M + \mathcal{A}_N \quad \wedge \quad \mathcal{A}_M \cap \mathcal{A}_N = 0.$$

Benutzen wir (b), ist dies zu

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{M\cup N} \quad \wedge \quad \mathcal{A}_{M\cap N} = 0$$

äquivalent. Es genügt daher für eine beliebiges $L \subset \mathbb{K}$ folgende Äquivalenzen zu beweisen:

$$\mathcal{A}_L = \mathcal{A} \iff L = \mathbb{K}, \quad \mathcal{A}_L = 0 \iff L = \emptyset.$$

$\mathcal{A}_L = \mathcal{A} \Rightarrow L = \mathbb{K}$: es gelte also $\mathcal{A}_L = \mathcal{A}$. Wir definieren $1 \in \mathcal{A}$ durch $1(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{K}$. Dann gilt nach Voraussetzung $1 \in \mathcal{A}_L$. Damit gilt

$$\forall x \in \mathbb{K} \setminus L \colon 0 = 1(x) = 1.$$

Da die Aussage $0 = 1$ falsch ist, folgt $\mathbb{K} \setminus L = \emptyset$ und damit $L = \mathbb{K}$.

$L = \mathbb{K} \Rightarrow \mathcal{A}_L = \mathcal{A}$: Es gelte also $L = \mathbb{K}$. Dann ist $\mathbb{K} \setminus L = \emptyset$ und daher für jedes $f \in \mathcal{A}$ die Aussage

$$\forall x \in \mathbb{K} \setminus L \colon f(x) = 0$$

wahr. Es folgt $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_L$ und damit auch $\mathcal{A} = \mathcal{A}_L$ (da definitionsgemäß $\mathcal{A}_L \subset \mathcal{A}$ gilt).

$\mathcal{A}_L = 0 \Rightarrow L = \emptyset$: Es gelte also $\mathcal{A}_L = 0$. Angenommen es ist $L \neq \emptyset$. Dann können wir ein $z \in L$ wählen. Definiere $f \in \mathcal{A}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = z \\ 0 & \text{falls } x \neq z \end{cases}.$$

Wegen $z \in L$ gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{K} \setminus L$, also $f \in \mathcal{A}_L = 0$. Daher folgt $f = 0$ und wir erhalten den Widerspruch $0 = f(z) = 1$.

$L = \emptyset \Rightarrow \mathcal{A}_L = 0$: gilt $L = \emptyset$, so ist $\mathbb{K} \setminus L = \mathbb{K}$. Es folgt

$$\mathcal{A}_L = \{f \in \mathcal{A} \colon \forall x \in \mathbb{K} \colon f(x) = 0\} = \{0\} = 0.$$

Aufgabe 39

Beweisen Sie Lemma 4.37 aus der Vorlesung: Es sei V ein Vektorraum.

(a) Ein einziges Element $a \in V$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $a \neq o$ ist.

(b) $a_1, \ldots, a_n \in V$, $n \geq 2$, sind genau dann linear abhängig, wenn für mindestens ein k, $1 \leq k \leq n$, gilt:

$$a_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i a_i \quad \text{mit} \quad \lambda_i \in \mathbb{K}.$$

Lösung:

(a) Es sei einmal a linear unabhängig. Wegen $1 \neq 0$ ist dann $1 \cdot a \neq o$, also $a \neq o$. Es gelte nun umgekehrt $a \neq o$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\lambda a = o$, so folgt $\lambda = 0$ (V4$'$ im Kappel–Skriptum). Also ist a linear unabhängig.

(b) Wir nehmen zunächst an, dass $a_1, \ldots, a_n$ linear abhängig sind. Dann gibt es $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$, die nicht alle Null sind, mit

$$\mu_1 a_1 + \ldots \mu_n a_n = o. \tag{4}$$

Da nicht alle μ_k Null sind, können wir ein $1 \leq k \leq n$ wählen, sodass $\mu_k \neq 0$ ist. Setzen wir $\lambda_i = -\mu_i/\mu_k$ für alle $i = 1, \ldots n$, $i \neq k$ folgt aus (4)

$$a_k = -\frac{1}{\mu_k}(\mu a_k) = -\frac{1}{\mu_k} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \mu_i a_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i a_i.$$

Es sei nun umgekehrt $1 \leq k \leq n$ und es seien $\lambda_i \in \mathbb{K}$ $(1 \leq i \neq k \leq n)$ mit

$$a_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i a_i.$$

Setzen wir $\lambda_k = -1$, so folgt

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = o.$$

Wegen $\lambda_k = -1 \neq 0$ sehen wir, dass $a_1, \ldots, a_n$ linear abhängig sind.

Aufgabe 40

Stellen Sie für folgende Mengen fest, ob diese als Teilmengen von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (definiert wie in Aufgabe 38) linear unabhängig sind.

(a) $F = \{ f_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{R},\ f_a(x) = x + a \}$.
(b) $G = \{ g_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N},\ g_n(x) = x^2 + 2nx + n^2 \}$.
(c) $H = \{ h_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N},\ h_n(x) = \frac{1}{n+x^2} \}$.

Lösung:

Zur Erinnerung: eine Teilmenge M eines Vektorraums heißt linear unabhängig, falls je endlich viele, paarweise verschiedene Elemente von M linear unabhängig sind. Es folgt, dass M genau dann linear abhängig ist, wenn es endlich viele, paarweise verschiedene Elemente von M gibt, die linear abhängig sind.

(a) Wir zeigen, dass f_0, f_1, f_2 linear abhängig sind. Dann folgt auch, dass F linear abhängig ist (beachte, dass f_0, f_1, f_2 auch wirklich verschieden sind). Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$(\frac{1}{2} f_0 - f_1 + \frac{1}{2} f_2)(x) = \frac{1}{2} x - x - 1 + \frac{1}{2}(x+2) = 0, \tag{5}$$

woraus $1/2 \cdot f_0 - f_1 + 1/2 \cdot f_2 = 0$ folgt. Daher sind f_0, f_1, f_2 linear abhängig.

Bemerkung: Je drei verschiedene Elemente von F sind linear abhängig. Denn definieren, wir p_0, $p_1 \colon \mathbb{R} \to R$ durch $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so gilt $f_a = p_1 + a p_0$ für jedes $a \in \mathbb{R}$. Es folgt $F \subset [p_0, p_1]$. Wegen $\dim([p_0, p_1]) \leq 2$ (sogar $= 2$), sind je drei Elemente von $[p_0, p_1]$ linear abhängig.

Zur Frage, wie man auf (5) kommt siehe die Lösung von (b).

(b) Neben p_0, p_1 (siehe Lösung zu (a)) betrachten wir p_2 definiert durch $p_2(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann folgt $G \subset [p_0, p_1, p_2]$. Wegen $\dim([p_0, p_1, p_2]) \leq 3$ (sogar $= 3$), sind je vier Elemente von $[p_0, p_1, p_2]$, also auch von G, linear abhängig (und wir sind eigentlich schon fertig) .

Insbesondere sind g_1, g_2, g_3, g_4 linear abhängig. Wir bestimmen noch a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ mit $a g_1 + b g_2 + c g_3 + d g_4 = 0$, d.h. mit

$$\begin{aligned} 0 &= a(x^2 + 2x + 1) + b(x^2 + 4x + 4) + c(x^3 + 6x + 9) + d(x^2 + 8x + 16) = \\ &= (a + b + c + d)x^2 + (2a + 4b + 6c + 8d)x + a + 4b + 9c + 16d \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir müssen also nur a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ so bestimmen, dass

$$\begin{array}{ccccccccc} a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\ 2a & + & 4b & + & 6c & + & 8d & = & 0 \\ a & + & 4b & + & 9c & + & 16d & = & 0 \end{array}$$

gilt, d.h. wir müssen ein lineares Gleichungssystem lösen. Tut man dies, so erhält man zum Beispiel die Lösung

$$(a, b, c, d) = (-1, 3, -3, 1)$$

und es folgt

$$-g_1 + 3g_2 - 3g_3 + g_4 = 0.$$

(c) Wir zeigen, dass H linear unabhängig ist. Dazu wählen wir $r \in \mathbb{N}$ und $n_1, \ldots n_r \in \mathbb{N}$ paarweise verschieden, und zeigen, dass $h_{n_1}, \ldots, h_{n_r}$ linear unabhängig sind. Dazu seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 h_{n_1} + \ldots + \lambda_r h_{n_r} = 0$. Wir müssen $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ zeigen. Aus $\lambda_1 h_{n_1} + \ldots + \lambda_r h_{n_r} = 0$ erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{1}{n_i + x^2} = 0 \tag{6}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir definieren nun Hilfsfunktionen:

$$P \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \prod_{i=1}^{r} (n_i + x)$$

und für $i = 1, \ldots, r$

$$P_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} (n_k + x).$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{n_i + x^2} = \frac{P_i(x^2)}{P(x^2)}.$$

Aus (6) folgt durch Multiplikation mit $P(x^2)$

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i(x^2) = 0 \tag{7}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nun beachte man, dass die Funktion $Q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i(x)$$

eine Polynomfunktion ist (da alle P_i Polynomfunktionen sind). Aus (7) folgt, dass alle positiven reellen Zahlen Nullstellen von Q sind. Da eine Polynomfunktion $\neq 0$ nur endlich viele Nullstellen hat, folgt $Q = 0$. Wir erhalten daher

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i(x) = 0 \tag{8}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Es sei jetzt $1 \leq j \leq r$. Wir zeigen $\lambda_j = 0$. Dazu setzen wir $x = -n_j$ in (8) ein. Wegen

$$P_i(-n_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{r} (n_k - n_j) \neq 0 & \text{falls } i = j \end{cases},$$

für $i = 1, \ldots, r$, erhalten wir zunächst

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i(-n_j) = \lambda_j P_j(-n_j)$$

und dann $\lambda_j = 0$.

Bemerkung für diejenigen, die Partialbruchzerlegungen kennen: die lineare Unabhängigkeit von H folgt aus der Eindeutigkeitsaussage im Satz über Partialbruchzerlegungen von rationalen Funktionen (in der reellen Form).