Lineare Algebra 1 (NAWI) – WS 2020/21

Übungsblatt 09 – 09.12.2020

Aufgabe 41
Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V sei ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit $\dim V = n < \infty$, A sei eine linear unabhängige Teilmenge von V und U sei ein Unterraum von V. Zeigen Sie:

(a) Jede nicht leere Teilmenge von A ist wieder linear unabhängig.

(b) A ist genau dann Basis von V, wenn A aus n Elementen besteht.

(c) Wenn $\dim(U) = \dim(V)$, dann gilt $U = V$.

Lösung:
(a) Es sei B eine nicht leere Teilmenge von A. Wir müssen zeigen: sind $b_1, \ldots, b_r$ paarweise verschiedene Elemente von B, so sind $b_1, \ldots, b_r$ linear unabhängig. Dazu wählen wir also beliebige, paarweise verschiedene $b_1, \ldots, b_r$ in B. Wegen $B \subset A$, sind dann $b_1, \ldots, b_r \in A$ paarweise verschieden. Da A nach Voraussetzung linear unabhängig ist, sind $b_1, \ldots, b_r$ linear unabhängig.
(b) Es sei einmal A eine Basis von V. Bezeichnen wir mit $|X|$ die Anzahl einer endlichen Menge X, so gilt nach Definition von $\dim(V)$:

$$n = \dim(V) = |A|.$$

Es gelte nun umgekehrt $|A| = n$. Nach dem Austauschsatz von Steinitz (Kappel–Skriptum Satz 4.48) gibt es eine Basis B von V mit $A \subset B$. Dann folgt

$$n = |A| \leq |B| = \dim(V) = n.$$

woraus $|A| = |B|$ folgt. Wegen $A \subset B$ erhalten wir $A = B$. Also ist A eine Basis von V.
(c) Es sei B eine Basis von U. Dann ist B linear unabhängig und es gilt $|B| = \dim(U) = \dim(V) = n$. Nach (b) (angewandt auf B) ist daher B eine Basis von V. Wir erhalten

$$U \overset{B \text{ ist Basis von } U}{=} [B] \overset{B \text{ ist Basis von } V}{=} V.$$

Aufgabe 42
Sei

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3-a \\ 0 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1+a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von $U = [u_1, u_2, u_3, u_4] \subseteq \mathbb{R}^4$ abhängig von $a \in \mathbb{R}$. Für die Fälle, in denen $\dim U < 4$ ist, ergänzen Sie die gegebenen Vektoren zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

Lösung:
Um eine Basis von U zu bestimmen gehen wir wie in der Lösung von Aufgabe 37 erklärt vor: wir lösen zuerst das Gleichungssystem

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = o. \tag{1}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3-a & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a & a \\ 2 & 3 & -1 & 1+a \\ 1 & a & 0 & 0 \end{array} \quad \xrightarrow[-z_1+z_4]{\substack{-z_1+z_2 \\ -2z_1+z_3}} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 3-a & -1 & 1 \\ 0 & -3+a & a+1 & a-1 \\ 0 & -3+2a & 1 & a-1 \\ 0 & -3+2a & 1 & -1 \end{array} \quad \xrightarrow[-z_3+z_4]{-(a+1)z_3+z_2}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3-a & -1 & 1 \\ 0 & -2a(a-1) & 0 & -a(a-1) \\ 0 & -3+2a & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{array} \quad (*).$$

Jetzt haben wir noch $-2a(a-1)$, $-a(a-1)$ in der zweiten Zeile und $-a$ in der vierten Zeile zum Eliminieren zur Verfügung. Dazu müssen diese Zahlen nicht Null sein, wir brauchen also eine Fallunterscheidenung.

1. Fall: $a \neq 0$ und $a \neq 1$. Dann geht es weiter:

$$(*) \quad \xrightarrow{-1/az_4} \begin{array}{cccc} 1 & 3-a & -1 & 1 \\ 0 & -2a(a-1) & 0 & -a(a-1) \\ 0 & -3+2a & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \xrightarrow{\substack{-(a-1)z_4+z_3 \\ a(a-1)z_4+z_2 \\ -z_4+z_1}}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3-a & -1 & 0 \\ 0 & -2a(a-1) & 0 & 0 \\ 0 & -3+2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \xrightarrow{-1/(2a(a-1))z_2} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 3-a & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3+2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \xrightarrow{\substack{-(3-a)z_2+z_1 \\ -(-3+2a)z_2+z_3}}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \xrightarrow{z_3+z_1} \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

Daher ist $(0,0,0,0)$ die einzige Lösung des Gleichungssystems (1). Es folgt, dass u_1, u_2, u_3, u_4 linear unabhängig sind, also eine Basis von U bilden (da $[u_1, u_2, u_3, u_4] = U$ nach Definition gilt). Wegen $\dim(U) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ folgt noch $U = \mathbb{R}^4$ aus Aufgabe 41(c).

2. Fall: $a = 0$. Dann rechnen wir bei $(*)$ weiter:

$$(*) = \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \xrightarrow{z_3+z_1} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}. \tag{2}$$

Wir sehen, dass

$$\left\{ \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_2, \lambda_4 \in \mathbb{R} \right\} \tag{3}$$

die Lösungsmenge von (1) ist. Daraus folgt zunächst, dass u_1, u_3 linear unabhängig sind (das sieht man auch direkt, wenn man $a = 0$ in die Definition der u_i einsetzt; zur Übung wiederholen wir jedoch das Argument in der Lösung zu Aufgabe 37): sind λ_1, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 u_1 + \lambda_3 u_3 = o$, so folgt, dass $(\lambda_1, 0, \lambda_3, 0)$ eine Lösung von (1) ist. Da (3) die Lösungsmenge von (1) ist, folgt $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$.

Weiters folgt $u_2 \in [u_1, u_3]$ und $u_4 \in [u_1, u_3]$ (denn Einsetzen von $a = 0$ in die Definition der u_i zeigt $u_2 = -3u_3$, $u_4 = -u_3$; noch einmal zur Übung wiederholen wir das allgemeine Argument). Setzen wir in (3) $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_4 = 0$, so folgt $u_2 + 3u_3 = o$, also $u_2 = -3u_3 \in [u_1, u_3]$. Setzen wir $\lambda_2 = 0$, $\lambda_4 = 1$, so erhalten wir $u_3 + u_4 = o$, also $u_4 = -u_3 \in [u_1, u_3]$. Damit gilt $U = [u_1, u_2, u_3, u_4] = [u_1, u_3]$ und $\{u_1, u_3\}$ ist eine Basis von U. Es folgt $\dim(U) = 2$.

Wir müssen noch $\{u_1, u_3\}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzen. Dazu seien $e_1, \ldots e_4$ die Standardbasisvektoren. Wir zeigen, dass $\{u_1, u_3, e_2, e_4\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist. Wegen $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ und Aufgabe 41(b), müssen wir dazu nur zeigen, dass u_1, u_3, e_2, e_4 linear unabhängig sind. Dazu lösen wir $\lambda_1 u_1 + \lambda_3 u_3 + \mu_2 e_2 + \mu_4 e_4 = o$:

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (**).$$

Nun machen wir die gleichen Umformungen wie oben (für den Fall $a = 0$). Dann erhalten wir in den ersten beiden Spalten die erste und die dritte Spalte am Ende von (2). Um zu sehen, was in den beiden letzen Spalten passiert, müssen wir noch einmal genau auf die obigen Umformungen schauen. Bis zu $(*)$ haben wir nur z_1 und z_3 zum Elimineren gebraucht. Dann haben wir noch einmal mit z_3 eliminiert. Aber in den letzten beiden Spalten von $(**)$ stehen in der ersten und in der dritten Zeile nur Nullen. Daher passiert bei diesen Umformungen in den letzten beiden Spalten nichts. Wir erhalten daher

$$(**) \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \;.$$

Es folgt $\lambda_1 = \lambda_3 = \mu_2 = \mu_4 = 0$. Daher ist $\{u_1, u_3, e_2, e_4\}$ linear unabhängig und damit eine Basis von $\mathbb{R}^4$. Es ist jetzt hoffentlich auch klar, warum ich gerade e_2 und e_4 genommen habe.

3. Fall: $a = 1$. Dann rechnen wir wieder bei $(*)$ weiter

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \quad \xrightarrow{z_4+z_1} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \quad \xrightarrow{z_3+z_1} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \;.$$

Es folgt jetzt aus den im Fall $a = 0$ und in der Lösung von Aufgabe 37 erklärten Gründen, dass $\{u_1, u_3, u_4\}$ linear unabhängig ist, und dass $u_2 \in [u_1, u_3, u_4]$ gilt. Daher ist $U = [u_1, u_3, u_4]$ und $\{u_1, u_3, u_4\}$ ist eine Basis von U. Inbesondere gilt $\dim(U) = 3$.

Wir müssen noch $\{u_1, u_3, u_4\}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$ ergänzen. Wir zeigen dass $\{u_1, u_3, u_4, e_2\}$ eine Basis vob $\mathbb{R}^4$ ist. Wieder müssen wir nur zeigen, dass $\{u_1, u_3, u_4, e_2\}$ linear unabhängig sind. Wir lösen dazu wieder $\lambda_1 u_1 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 + \mu e_2 = 0$:

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad (***)$$

Nun machen wir wieder die gleichen Umformungen wie im Fall $a = 1$. Bie diesen haben wir nur die Zeilen 1, 3 und 4 benutzt. Da in der letzten Spalte in $(***)$ in den Zeilen 1, 3, 4 nur Nullen stehen, ändert sich in der letzten Spalte bei diesen Umformungen nichts. Also

$$(***) \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{matrix} \;.$$

Es folgt $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = \mu = 0$, also ist $\{u_1, u_3, u_4, e_2\}$ linear unabhängig.

Aufgabe 43

Sei V ein Vektorraum, mit $\dim(V) < \infty$, und seien U, W Unterräume von V, sodass $\dim(U + W) = \dim(U \cap W) + 1$. Zeigen Sie, dass genau eine der Bedingungen $U \subseteq W$ und $W \subseteq U$ erfüllt ist.

Bemerkung: die Bedingung $\dim(V) < \infty$ haben wir in der ursprünglichen Fassung vergessen.

Lösung:

Wir zeigen zuerst, dass $U \subseteq W$ und $W \subseteq U$ nicht beide gelten können. Angenommen schon. Dann folgt $U = W$ und damit

$$U \cap W = U = U + U = U + W.$$

Damit ergibt sich der Widerspruch $\dim(U + W) = \dim(U \cap W) + 1 = \dim(U + W) + 1$.

Wir müssen also jetzt nur noch zeigen, dass $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gelten. Wegen

$$U \cap W \subseteq U \subseteq U + W$$

erhalten wir $\dim(U \cap W) \leq \dim(U) \leq \dim(U + W) = \dim(U \cap W) + 1$. Es folgt $\dim(U) = \dim(U \cap W)$ oder $\dim(U) = \dim(U \cap W) + 1 = \dim(U + W)$.

1. Fall: $\dim(U) = \dim(U \cap W)$. Dann folgt wegen $U \cap W \subset U$ aus Aufgabe 41(c) $U \cap W = U$ (hier brauchen wir $\dim(U) < \infty$, was aber aus $\dim(V) < \infty$ folgt). Wir erhalten $U = U \cap W \subseteq W$.

2. Fall: $\dim(U) = \dim(U + W)$. Dann folgt aus $U \subset U + W$ und Aufgabe 41(c) $U = U + W$. Damit ergibt sich $W \subseteq U + W = U$.

Aufgabe 44

Bestimmen Sie, welche der folgenden Abbildungen $\varphi : X \to Y$ linear sind:

(a) $X = Y = \mathbb{R}$, $\varphi(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$,
(b) $X = \mathbb{R}^3, Y = \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (2x - y + z, -x + 2z)$,
(c) $X = Y = \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y) = (|x|, 2y)$.

Berechnen Sie Bild, Kern, Rang und Defekt der linearen Abbildungen.

Lösung:

(a) Ist $b \neq 0$, so gilt $\varphi(0) = b \neq 0$. Daher ist φ im Fall $b \neq 0$ nicht linear. Wir nehmen daher ab nun $b = 0$ an. Dann gelten für alle x, $x' \in \mathbb{R}$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x + x') = a(x + x') = ax + ax' = \varphi(x) + \varphi(x'), \quad \varphi(\lambda x) = a(\lambda x) = \lambda(ax) = \lambda\varphi(x).$$

Daher ist φ linear.

Wir bestimmen nun Bild, Kern, Rang und Defekt von φ. Dazu unterscheiden wir die Fälle $a = 0$ und $a \neq 0$.

$a = 0$. Dann gilt $\varphi = 0$. Es folgt $\ker(\varphi) = \mathbb{R}$ und daher

$$\operatorname{def}(\varphi) = \dim(\ker(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}) = 1.$$

Weiters ist $\varphi(\mathbb{R}) = 0$ wegen $\varphi = 0$, was

$$\operatorname{rang}(\varphi) = \dim(\varphi(\mathbb{R})) = \dim(0) = 0$$

impliziert.

$a \neq 0$. Dann erhalten wir zunächst

$$\ker(\varphi) = \{x \in \mathbb{R} \colon \varphi(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \colon ax = 0\} \overset{a \neq 0}{=} \{0\} = 0,$$

und damit $\operatorname{def}(\varphi) = 0$.

Wegen $a \neq 0$ gilt $x = a(a^{-1}x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Dies zeigt $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ und daher ist $\operatorname{rang}(\varphi) = 1$.

(b). Wir zeigen als erstes, dass φ linear ist. Seien dazu (x, y, z), $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gelten

$$\begin{aligned}
\varphi((x, y, z) + (x', y', z')) &= \varphi(x + x', y + y', z + z') = \\
&= (2(x + x') - (y + y') + (z + z'), -(x + x') + 2(z + z')) = \\
&= (2x - y + z) + (2x' - y' + z') = \\
&= \varphi(x, y, z) + \varphi(x', y', z')
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda(x, y, z)) &= \varphi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (2(\lambda x) - (\lambda y) + (\lambda z), -(\lambda x) + 2(\lambda z)) = \\
&= \lambda(2x - y + z, -x + 2z) = \lambda\varphi(x, y, z),
\end{aligned}$$

woraus folgt, dass φ linear ist.
Wir bestimmen nun

$$\ker(\varphi) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \varphi(x,y,z) = (0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x - y + z = 0, -x + 2z = 0\}.$$

Dazu müssen wir also das Gleichungsssystem $2x - y + z = 0$, $-x + 2z = 0$ lösen:

$$\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{array} \xrightarrow{2z_2+z_1} \begin{array}{ccc} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{array}.$$

Wir sehen, dass $\{z(2,5,1) \colon z \in \mathbb{R}\} = [(2,5,1)]$ die Lösungsmenge unseres Gleichungssystems, also der Kern von φ ist. Wegen $(2,5,1) \neq 0$ ist $(2,5,1)$ linear unabhängig und damit eine Basis von $\ker(\varphi)$. Damit gilt $\operatorname{def}(\varphi) = \dim(\ker(\varphi)) = 1$.
Zur Bestimmung von $\operatorname{rang}(\varphi)$ verwenden wir Satz 5.12 im Kappel–Skriptum:

$$\operatorname{def}(\varphi) + \operatorname{rang}(\varphi) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3.$$

Damit folgt jetzt $\operatorname{rang}(\varphi) = 2$. Wegen $\operatorname{rang}(\varphi) = \dim(\varphi(\mathbb{R}^3))$ und $\varphi(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^2$ folgt aus Aufgabe 41(c) jetzt $\varphi(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$.

(c). Aus

$$\varphi((-1)(1,0)) = \varphi(-1,0) = (1,0) \neq (-1,0) = (-1)(1,0) = (-1)\varphi(1,0)$$

folgt, dass φ nicht linear ist.

Aufgabe 45
(a) Sei V ein Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie

$$\varphi(V) \cap \ker \varphi = \{o\} \iff \ker \varphi^2 = \ker \varphi,$$

wobei $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$, d.h., $\varphi^2(v) = (\varphi \circ \varphi)(v) = \varphi(\varphi(v))$ für $v \in V$.

(b) Seien U, V Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $L : U \to V$ eine lineare Abbildung. Weiters sei $b \in V$ gegeben und $x_0 \in U$ eine Lösung der Gleichung

$$L(x) = b. \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass $\{x_0 + w \mid w \in \ker L\}$ die Menge aller Lösungen der Gleichung (4) ist. Geben Sie eine hinreichende Bedingung für L an, so dass es genau ein $x \in V$ gibt, das (4) löst.

Lösung:
(a) Wir beginnen mit der Implikation $\Longrightarrow$, d.h. wir nehmen an, dass $\varphi(V) \cap \ker(\varphi) = 0$ gilt, und zeigen $\ker(\varphi) = \ker(\varphi^2)$. Dazu müssen wir die beiden Inklusionen $\subset$ und $\supset$ zeigen.
$\subset$: es sei $v \in \ker(\varphi)$, also $\varphi(v) = o$. Dann erhalten wir

$$\varphi^2(v) = \varphi(\varphi(v)) = \varphi(o) = o,$$

also $v \in \ker(\varphi^2)$ (man beachte, dass wir für diesen Beweis keine Voraussetzung gebraucht haben; die Inklusion $\ker(\varphi) \subset \ker(\varphi^2)$ gilt also immer).
$\supset$: es sei $v \in \ker(\varphi^2)$, also $\varphi(\varphi(v)) = o$. Dann folgt $\varphi(v) \in \ker(\varphi)$. Per Definition gilt auch $\varphi(v) \in \varphi(V)$. Damit erhalten wir $\varphi(v) \in \ker(\varphi) \cap \varphi(V) = 0$, also $\varphi(v) = o$ und damit $v \in \ker(\varphi)$.
Nun zum Beweis von $\Longleftarrow$. Wir nehmen also $\ker(\varphi) = \ker(\varphi^2)$ an und müssen $\ker(\varphi) \cap \varphi(V) = 0$ zeigen. Da die Inklusion $\supset$ klar ist, brauchen wir nur $\subset$ beweisen. Sei dazu $v \in \ker(\varphi) \cap \varphi(V)$, also $v \in \ker(\varphi)$ und $v \in \varphi(V)$. Dann gilt $\varphi(v) = o$ und $v = \varphi(w)$ für ein $w \in V$. Aus

$$o = \varphi(v) = \varphi(\varphi(w)) = \varphi^2(w)$$

erhalten wir $w \in \ker(\varphi^2) = \ker(\varphi)$ und daher $v = \varphi(w) = o$, d.h. $v \in 0$.

(b) Es sei L' die Lösungsmenge von (4) und es sei $L'' = \{x_0 + w \,|\, w \in \ker L\}$. Wir müssen also $L' = L''$, d.h. $L' \subset L''$ und $L' \supset L''$ zeigen.
$\subset$: es sei $u \in L'$ beliebig. Wir schreiben u in der Form $u = x_0 + (u - x_0)$. Also genügt es $u - x_0 \in \ker(L)$ zu zeigen. Dies folgt aus

$$L(u - x_0) = L(u) - L(x_0) = b - b = o.$$

$\supset$: es sei $u \in L''$ beliebig. Dann gilt $u = x_0 + w$ mit $w \in \ker(L)$. Es folgt

$$L(u) = L(x_0 + w) = L(x_0) + L(w) = b + o = b,$$

also $u \in L'$.

Wir nehmen weiterhin an, dass x_0 eine Lösung von (4) ist. Dann ist die Bedingung $\ker(L) = 0$ eine hinreichende Bedingung, dass (4) genau eine Lösung hat, d.h. dass x_0 die einzige Lösung von (4) ist. Denn $\ker(L) = 0$ impliziert (ist sogar äquivalent zu) die Injektivität von L (siehe Satz 5.11 im Kappel–Skriptum). Also hat die Gleichung (4) höchstens eine Lösung.
Bemerkung: die Bedingung $\ker(L) = 0$ ist auch notwendig dafür, dass (4) genau eine Lösung besitzt. Denn angenommen, (4) hat genau eine Lösung. Dann ist also x_0 die einzige Lösung von (4). Aus dem ersten Teil folgt

$$\{x_0\} = \{x_0 + w \colon \in \ker(L)\}.$$

Ist jetzt $w \in \ker(L)$ beliebig, so folgt $x_0 = x_0 + w$, also $w = o$. Daher ist $\ker(L) = 0$.