Lineare Algebra 1 (NAWI) – WS 2020/21

Übungsblatt 10 – 16.12.2020

Aufgabe 46
Es sei $0 \neq a \in \mathbb{R}^2$. Überprüfen Sie, dass folgende Abbildungen linear sind, bestimmen Sie Kern und Bild, und interpretieren Sie die Abbildungen geometrisch.

(a) $p_a\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ v \mapsto v - \frac{\langle a,v\rangle}{\|a\|^2}a.$

(b) $s_a\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ v \mapsto v - 2\frac{\langle a,v\rangle}{\|a\|^2}a.$

Lösung:
Wir zeigen als erstes, dass p_a und s_a linear sind. Dafür definieren wir für $k \in \mathbb{R}$ eine Abbildung $\varphi_k\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $\varphi_k(v) = v - k\langle a,v\rangle a/\|a\|^2$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$. Dann gelten $p_a = \varphi_1$ und $s_a = \varphi_2$. Es genügt daher zu zeigen, dass φ_k für alle $k \in \mathbb{R}$ linear ist. Seien dazu v, $w \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gelten

$$\begin{aligned}\varphi_k(v+w) &= v+w-k\langle a, v+w\rangle\frac{a}{\|a\|^2} = v+w-k\left(\langle a,v\rangle + \langle a,w\rangle\right)\frac{a}{\|a\|^2} = \\ &= v-k\langle a,v\rangle\frac{a}{\|a\|^2} + w - k\langle a,w\rangle\frac{a}{\|a\|^2} = \varphi_k(v)+\varphi_k(w)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\varphi_k(\lambda v) &= \lambda v - k\langle a,\lambda v\rangle\frac{a}{\|a\|^2} = \lambda v - k\lambda\langle a,v\rangle\frac{a}{\|a\|^2} = \lambda\left(v - k\langle a,v\rangle\frac{a}{\|a\|^2}\right) = \\ &= \lambda\varphi_k(v).\end{aligned}$$

Daher ist φ_k linear.
Wir zeigen nun $p_a(\mathbb{R}^2) = \{a\}^\perp = \{v \in \mathbb{R}^2\colon \langle a,v\rangle = 0\}$ und $\ker(p_a) = \mathbb{R}a$. Dann folgen

$$\operatorname{def}(p_a) = \dim\ker(p_a) = 1, \quad \operatorname{rang}(p_a) = \dim p_a(\mathbb{R}^2) = 1.$$

$p_a(\mathbb{R}^2) \subset \{a\}^\perp$: es sei $v \in p_a(\mathbb{R}^2)$ beliebig. Dann gilt $v = p_a(w)$ für ein $w \in \mathbb{R}^2$. Dann ist

$$\langle a,v\rangle = \langle a, p_a(w)\rangle = \langle a, w - \langle a,w\rangle\frac{a}{\|a\|^2}\rangle = \langle a,w\rangle - \frac{\langle a,w\rangle}{\|a\|^2}\langle a,a\rangle = \langle a,w\rangle - \langle a,w\rangle = 0,$$

also $v \in \{a\}^\perp$.
$\{a\}^\perp \subset p_a(\mathbb{R}^2)$: Es sei $v \in \{a\}^\perp$. Dann gilt

$$p_a(v) = v - \langle a,v\rangle\frac{a}{\|a\|^2} \overset{v\in\{a\}^\perp \Rightarrow \langle a,v\rangle = 0}{=} v.$$

Daher gilt $v = p_a(v) \in p_a(\mathbb{R}^2)$.
$\ker(p_a) \subset \mathbb{R}a$: es sei $v \in \ker(p_a)$. Dann folgt

$$o = p_a(v) = v - \langle a,v\rangle\frac{a}{\|a\|^2},$$

also

$$v = \frac{\langle a,v\rangle}{\|a\|^2}a \in \mathbb{R}a.$$

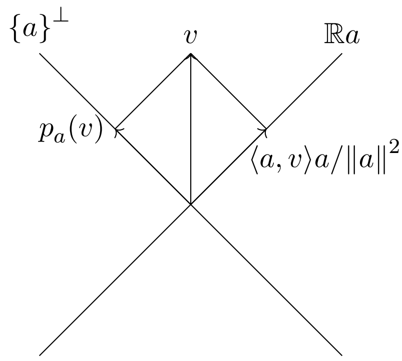
$\mathbb{R}a \subset \ker(p_a)$: Es sei $v \in \mathbb{R}a$, etwa $v = \lambda a$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$p_a(v) = p_a(\lambda a) = \lambda a - \frac{\langle a,\lambda a\rangle}{\|a\|^2}a = \lambda a - \lambda\frac{\langle a,a\rangle}{\|a\|^2}a = \lambda a - \lambda a = o,$$

also $v \in \ker(p_a)$.
Nun zur geometrischen Interpretation von p_a. Es sei $v \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $p_a(v) \in p_a(\mathbb{R}^2) = \{a\}^\perp$ und

$$p_a(v) = v - \frac{\langle a, v\rangle}{\|a\|^2} a \in v + \mathbb{R}a.$$

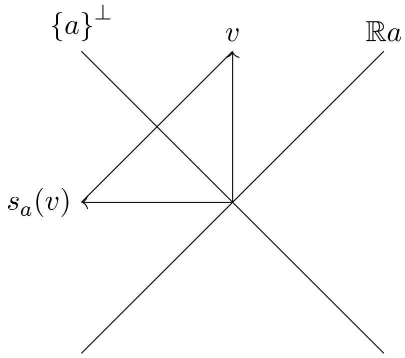
Daher ist $p_a(v)$ der Schnittpunkt der Geraden $\{a\}^\perp$ mit der Geraden $v + \mathbb{R}a$ (= Gerade durch v die normal auf $\{a\}^\perp$ steht).



Man nennt daher p_a die orthogonale Projektion auf $\{a\}^\perp$.
Nun zu s_a. Es gilt für jedes $v \in \mathbb{R}^2$

$$s_a(v) = v - 2\langle a, v\rangle \frac{a}{\|a\|^2} = p_a(v) - \langle a, v\rangle \frac{a}{\|a\|^2}.$$

Das Bild sieht daher so aus:



Man nennt daher s_a die (orthogonale) Spiegelung an der Geraden $\{a\}^\perp$. Anhand dieser geometrischen Interpretation läßt sich $s_a \circ s_a = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ vermuten (wir beweisen dies gleich auch). Dann ist s_a bijektiv (denn s_a ist die Umkehrabbildung von s_a). Es folgen

$$\ker(s_a) \overset{s_a \text{ ist injektiv}}{=} \{o\},$$

und damit $\operatorname{def}(s_a) = \dim\ker(s_a) = 0$, und

$$s_a(\mathbb{R}^2) \overset{s_a \text{ ist surjektiv}}{=} \mathbb{R}^2,$$

und damit $\operatorname{rang}(s_a) = \dim s_a(\mathbb{R}^2) = 2$.
Wir zeigen jetzt $s_a \circ s_a = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$. Dazu sei $v \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Zunächst gilt

$$\langle a, s_a(v)\rangle = \langle a, v - 2\frac{\langle a, v\rangle}{\|a\|^2} a\rangle = \langle a, v\rangle - 2\frac{\langle a, v\rangle}{\|a\|^2}\langle a, a\rangle = \langle a, v\rangle - 2\langle a, v\rangle = -\langle a, v\rangle.$$

Wir erhalten

$$(s_a \circ s_a)(v) = s_a(s_a(v)) = s_a(v) - 2\frac{\langle a, s_a(v)\rangle}{\|a\|^2} a = s_a(v) + 2\frac{\langle a, v\rangle}{\|a\|^2} a = v.$$

Daher gilt $s_a \circ s_a = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

Aufgabe 47
Es sei $\psi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen V und W. Beweisen Sie: Die Abbildung ψ ist genau dann injektiv, wenn für jede Menge $M \subseteq V$ gilt: Ist M linear unabhängig, so ist auch $\psi(M)$ linear unabhängig.

Lösung:
Es sei einmal ψ injektiv und $M \subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge. Wir zeigen, dass dann auch $\psi(M)$ linear unabhängig ist. Dazu wählen wir paarweise verschiedene $w_1,\ldots, w_r \in \psi(M)$ und müssen zeigen, dass $w_1,\ldots, w_r$ linear unabhängig sind. Es seien also $\lambda_1,\ldots, \lambda_r \in K$ (= Körper, über dem V und W Vektorräume sind) mit $\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_r w_r = o$. Unsere Aufgabe ist es jetzt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ zu zeigen.
Wegen $w_i \in \psi(M)$ gibt es $v_i \in M$ mit $w_i = \psi(v_i)$ für alle $i = 1, \ldots, r$. Da die w_i paarweise verschieden sind, sind es die v_i ebenfalls. Da M linear unabhängig ist, sind die v_i linear unabhängig. Nun gilt

$$o = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_r w_r = \lambda_1 \psi(v_1) + \ldots + \lambda_r \psi(v_r) = \psi(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r),$$

woraus wir wegen der Injektivität von ψ auf $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = o$ schließen können. Da die v_i linear unabhängig sind, folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$.

Es sei jetzt $\psi(M)$ für jedes linear unabhängige $M \subset V$ ebenfalls linear unabhängig. Wir zeigen, dass ψ injektiv ist. Aus der Vorlesung wissen wir, dass dies zu $\ker(\psi) = \{o\}$ äquivalent ist. Nun haben wir die Äquivalenzen:

$$\ker(\psi) = \{o\} \iff \forall v \in V : \psi(v) = o \Rightarrow v = o \iff \forall v \in V : v \neq o \Rightarrow \psi(v) \neq 0.$$

Es genügt daher $\forall v \in V : v \neq o \Rightarrow \psi(v) \neq 0$ zu zeigen. Dazu sei $v \in V$ beliebig mit $v \neq o$. Dann ist $\{v\}$ linear unabhängig (Aufgabe 39). Nach Voraussetzung impliziert dies, dass $\psi(\{v\}) = \{\psi(v)\}$ linear unabhängig ist. Neuerliche Anwendung von Aufgabe 39 zeigt $\psi(v) \neq o$.

Aufgabe 48
Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis B. Durch Einschränkung der Skalarmultiplikation ist V auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Beweisen Sie, dass $B \cup \{\, \mathrm{i}b \mid b \in B \,\}$ eine Basis von V über $\mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die komplexe Konjugation

$$\begin{cases} \mathbb{C} & \to \mathbb{C} \\ z = a + \mathrm{i}b & \mapsto \overline{z} = a - \mathrm{i}b \qquad (a,\, b \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

als Abbildung linear über $\mathbb{R}$, aber nicht über $\mathbb{C}$, ist.

(c) Bestimmen Sie Basen von

$$L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \{\, \varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid \varphi \text{ ist } \mathbb{C}\text{-linear} \,\}$$

und von

$$L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \{\, \varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid \varphi \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear} \,\}.$$

Lösung:
(a) Wir müssen zeigen:

i) $B \cup iB$ ist linear unabhängig über $\mathbb{R}$;
ii) $[B \cup iB]_{\mathbb{R}} = V$.

i) Es seien $v_1,\ldots, v_r \in B \cup iB$ paarweise verschieden. Dann gibt es paarweise verschiedene $b_1,\ldots, b_n \in B$, sodass für jedes $1 \leq k \leq r$ gilt $v_k = b_j$ oder $v_k = ib_j$ für ein $1 \leq j \leq n$. Es genügt daher zu zeigen, dass $b_1, \ldots, b_n, ib_1,\ldots, ib_n$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind. Da B eine $\mathbb{C}$–Basis von V ist, ist B linear unabhängig über $\mathbb{C}$. Damit sind $b_1,\ldots, b_n$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$.

Es seien nun λ_1, μ_1, …,λ_n, $\mu_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1(ib_1) + \ldots + \mu_n(ib_n) = o.$$

Umschreiben liefert

$$(\lambda_1 + i\mu_1)b_1 + \ldots + (\lambda_n + i\mu_n)b_n = o.$$

Da b_1,…, b_n linear unabhängig über $\mathbb{C}$ sind, folgt $\lambda_1 + i\mu_1 = \ldots = \lambda_n + i\mu_n = 0$. Da die λ_i und μ_i reell sind, folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \mu_1 = \ldots = \mu_n = 0$. Daher sind b_1,…, b_n, ib_1,…, ib_n linear unabhängig über $\mathbb{R}$.

ii) Die Inklusion $\subset$ ist trivial. Es sei nun $v \in V$. Da B eine $\mathbb{C}$–Basis von V ist, gilt $V = [B]_{\mathbb{C}}$. Es gibt daher b_1,…, $b_n \in B$ und ζ_1,…, $\zeta_n \in \mathbb{C}$ mit $v = \zeta_1 b_1 + \ldots + \zeta_n b_n$. Für $j = 1, \ldots, n$ sei $\lambda_j = \mathrm{Re}(\zeta_j) \in \mathbb{R}$ und $\mu_j = \mathrm{Im}(\zeta_j) \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$v = \lambda_1 b_1 + \ldots \lambda_n b_n + \mu_1(ib_1) + \ldots + \mu_n(ib_n) \in [B \cup iB]_{\mathbb{R}}.$$

(b) Wir wissen $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$, $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$ für alle z, $w \in \mathbb{C}$.
Es sei nun $c\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Konjugation. Dann gelten für alle z, $w \in \mathbb{C}$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$c(z+w) = \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} = c(z) + c(w), \quad c(\lambda z) = \overline{\lambda z} = \overline{\lambda}\overline{z} = \lambda\overline{z} = \lambda c(z).$$

Daher ist c $\mathbb{R}$–linear.
Aus

$$c(i \cdot 1) = \overline{i} = -i \neq i = i \cdot 1 = ic(1)$$

folgt, dass c nicht $\mathbb{C}$–linear ist.

(c) Wir benutzen die Aussagen, Bezeichnungen und Konstruktionen in Satz 5.16 des Kappel–Skriptums.
$L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$: $\{1\}$ ist eine $\mathbb{C}$-Basis von $\mathbb{C}$. Wir erhalten damit die $\mathbb{C}$–lineare Abbildung $\omega_{1,1}$. Zur Erinnerung: diese ist die eindeutig bestimmte $\mathbb{C}$–lineare Abbildung mit $\omega_{1,1}(1) = 1$. Da $\mathbb{C}$ ein endlich dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist, ist $\{\omega_{1,1}\}$ eine Basis von $L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ (Satz 5.16).
Es bleibt $\omega_{1,1}$ zu bestimmen: für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\omega(z) = \omega(z \cdot 1) = z\omega_{1,1}(1) = z,$$

also $\omega_{1,1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$.
$L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$: $\{1, i\}$ ist eine $\mathbb{R}$–Basis von $\mathbb{C}$ (denn: $\{1\}$ ist eine $\mathbb{C}$–Basis von $\mathbb{C}$, also $\{1, i\}$ eine $\mathbb{R}$–Basis von $\mathbb{C}$ nach (a); oder einfacher: jede komplexe Zahl ist eine eindeutige $\mathbb{R}$–Linearkombination von 1 und i).
Für $z, w \in \{1, i\}$ erhalten wir die $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $\omega_{z,w}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Zur Erinnerung, diese ist die einzige $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\omega_{z,w}(z) = w$ und $\omega_{z,w}(u) = 0$ für $u \in \{z, w\}$, $u \neq z$.

Vorsicht: Das $\omega_{1,1}$ hier, ist nicht das gleiche wie das für $L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ konstruierte. Warum nicht?

Da $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$–Vektorraum endlich dimensional ist, ist $\{\omega_{1,1}, \omega_{1,i}, \omega_{i,1}, \omega_{i,i}\}$ eine $\mathbb{R}$–Basis von $L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.
Wir bestimmen diese ω's. Dazu sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig, $z = a + ib$ mit a, $b \in \mathbb{R}$. Dann gelten

$$\begin{aligned}
\omega_{1,1}(z) &= \omega_{1,1}(a+ib) = a\omega_{1,1}(1) + b\omega_{1,1}(i) = a \cdot 1 + b \cdot 0 = a,\\
\omega_{1,i}(z) &= \omega_{1,i}(a+ib) = a\omega_{1,i}(1) + b\omega_{1,i}(i) = a \cdot i + b \cdot 0 = ia,\\
\omega_{i,1}(z) &= \omega_{i,1}(a+ib) = a\omega_{i,1}(1) + b\omega_{i,1}(i) = a \cdot 0 + b \cdot 1 = b,\\
\omega_{i,i}(z) &= \omega_{i,i}(a+ib) = a\omega_{i,i}(1) + b\omega_{i,i}(i) = a \cdot 0 + b \cdot i = ib.
\end{aligned}$$

Aufgabe 49
Es sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{R}$. Mit der komponentenweisen Addition

$$(a_n)_{n\geq 0} + (b_n)_{n\geq 0} := (a_n + b_n)_{n\geq 0} \qquad\qquad (a_n,\, b_n \in \mathbb{R})$$

und der Skalarmultiplikation

$$c(a_n)_{n\geq 0} := (ca_n)_{n\geq 0} \qquad\qquad (c,\, a_n \in \mathbb{R})$$

ist $\mathcal{F}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.
Die Abbildungen $l,\, r\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ seien definiert durch

$$l\big((a_n)_{n\geq 0}\big) := (a_{n+1})_{n\geq 0} \qquad \text{und} \qquad r\big((a_n)_{n\geq 0}\big) := (a_{n-1})_{n\geq 0},$$

wobei wir in der Definition von r stets $a_{-1} = 0$ setzen. Beweisen Sie:
(a) l ist eine lineare Abbildung, die surjektiv aber nicht injektiv ist.
(b) r ist eine lineare Abbildung, die injektiv aber nicht surjektiv ist.

Lösung:
Wir zeigen als erstes, dass r und l linear sind. Dazu seien $a = (a_n)_{n\geq 0}$, $b = (b_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{F}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gelten

$$l(a+b) = l\big((a_n + b_n)_{n\geq 0}\big) = (a_{n+1} + b_{n+1})_{n\geq 0} = (a_{n+1})_{n\geq 0} + (b_{n+1})_{n\geq 0} = l(a) + l(b),$$
$$l(\lambda a) = l\big((\lambda a_n)_{n\geq 0}\big) = (\lambda a_{n+1})_{n\geq 0} = \lambda (a_{n+1})_{n\geq 0} = \lambda l(a),$$
$$r(a+b) = r\big((a_n + b_n)_{n\geq 0}\big) = (a_{n-1} + b_{n-1})_{n\geq 0} = (a_{n-1})_{n\geq 0} + (b_{n-1})_{n\geq 0} = r(a) + r(b)$$

(man beachte auch $(a+b)_{-1} = 0 = 0 + 0 = a_{-1} + b_{-1}$) und

$$r(\lambda a) = r\big((\lambda a_n)_{n\geq 0}\big) = (\lambda a_{n-1})_{n\geq 0} = \lambda (a_{n-1})_{n\geq 0} = \lambda r(a)$$

(beachte wieder $(\lambda a)_{-1} = 0 = \lambda \cdot 0 = \lambda a_{-1}$). Daher sind l und r linear.
Für jedes $a = (a_0, a_1, \ldots) \in \mathcal{F}$ gilt

$$l(r(a)) = l(0, a_0, a_1, \ldots) = (a_0, a_1, \ldots) = a.$$

Es folgt $l \circ r = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$.
Nun benötigen wir eine Erinnerung aus der Mengenlehre: sind $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ Abbildungen, so gelten

$$g \circ f \text{ ist injektiv } \Longrightarrow f \text{ ist injektiv}$$
$$g \circ f \text{ ist surjektiv } \Longrightarrow g \text{ ist injektiv}$$

Da $l \circ r = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ injektiv und surjektiv ist, ist also l surjektiv und r injektiv.
Aus

$$l(1, 0, \ldots) = (0, 0, \ldots)$$

folgt, dass l nicht injektiv ist. Ist $b = (b_n)_{n\geq 0}$ im Bild von r enthalten, so folgt $b_0 = 0$. Insbesondere ist $(1, 0, \ldots)$ nicht im Bild von r enthalten. Daher ist r nicht surjektiv.

Dieses Beispiel zeigt, dass in Korollar 5.13 die Bedingung $\dim(X) = \dim(Y) < \infty$ notwendig ist.

Aufgabe 50
Es sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass für $v_1, \ldots, v_n \in V$ $(n \geq 1)$ folgende Aussagen äquivalent sind:
(i) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

(ii) Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ existiert eine lineare Abbildung $\varphi_i \colon V \to \mathbb{K}$ mit $\varphi_i(v_i) = 1$ und $\varphi_i(v_j) = 0$ für $j \neq i$.

Zusatz: Warum sind die Aussagen im Allgemeinen nicht äquivalent zu: „Die Menge $\{v_1, \dots , v_n\}$ ist linear unabhängig"?

Lösung:
(i) $\Rightarrow$ (ii). Wir nehmen also an, dass $v_1,\dots, v_n$ linear unabhängig sind, und müssen die linearen Abbildungen $\varphi_1,\dots, \varphi_n$ mit den gewünschten Eigenschaften konstruieren. Beachte zunächst, dass die v_i paarweise verschieden sind (denn, wenn $v_i = v_j$ für $i \neq j$, dann $1 \cdot v_i + (-1)v_j = o$). Wir wählen eine Basis B von V mit $\{v_1, \dots, v_n\} \subset B$ (Satz 4.44). Anwendung von Satz 5.8 liefert für $i = 1, \dots, n$ (genau) eine lineare Abbildung $\varphi_i \colon V \to \mathbb{K}$ mit $\varphi_i(v_i) = 1$ und $\varphi_i(b) = 0$ für alle $b \in B \setminus \{v_i\}$. Sind nun $i, j \in \{1, \dots n\}$ mit $j \neq i$, so gilt $v_j \neq v_i$, also $v_j \in B \setminus \{v_i\}$. Daher gilt $\varphi_i(v_j) = 0$ für alle $1 \leq i \neq j \leq n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Für $i = 1, \dots, n$ sei $\varphi_i \colon V \to \mathbb{K}$ eine lineare Abbildung mit $\varphi_i(v_i) = 1$, $\varphi_i(v_j) = 0$ für alle $1 \leq i \neq j \leq n$. Wir zeigen, dass $v_1,\dots,v_n$ linear unabhängig sind. Dazu seien $\lambda_1,\dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = o$. Dann folgt für jedes $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} 0 = \varphi_i(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) &= \lambda_1 \varphi_i(v_1) + \dots + \lambda_n \varphi_i(v_n) = \\ &= \lambda_1 \cdot 0 + \dots + \lambda_{i-1} \cdot 0 + \lambda_i \cdot 1 + \lambda_{i+1} \cdot 0 + \dots + \lambda_n \cdot 0 = \lambda_i. \end{aligned}$$

Daher gilt $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, und wir sehen, dass $v_1,\dots, v_n$ linear unabhängig sind.

Zusatz: Wir geben ein Beispiel, dass die Aussagen

A $v_1,\dots, v_n$ sind linear unabhängig

B $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist linear unabhängig

nicht äquivalent sind. Dazu seien $V = \mathbb{K}$, $n = 2$ und $v_1 = v_2 = 1$. Dann sind v_1, v_2 linear abhängig ($1 \cdot v_1 + (-1)v_2 = 0$), aber $\{v_1, v_2\} = \{1\}$ ist linear unabhängig wegen $1 \neq 0$.
Dieses Beispiel zeigt also, dass die Implikation **B** $\Rightarrow$ **A** im Allgemeinen falsch ist. Die Implikation **A** $\Rightarrow$ **B** gilt aber immer.