Lineare Algebra 1 (NAWI) – WS 2020/21

Übungsblatt 11 – 13.01.2021

Aufgabe 51
Seien X, Y, Z Vektorräume über $\mathbb{K}$, $\varphi \in L(X,Y)$ und $\psi \in L(Y,Z)$. Beweisen Sie:
a) $\psi \circ \varphi \in L(X,Z)$.

b) Wenn φ bijektiv ist, dann $\varphi^{-1} \in L(Y,X)$.

Lösung:
a) Wir müssen zeigen, dass $\psi \circ \varphi \colon X \to Z$ linear ist. Dazu seien x_1, $x_2 \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann gelten

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)(x_1 + x_2) = \psi\big(\varphi(x_1 + x_2)\big) &\overset{\varphi \text{ ist lin.}}{=} \psi\big(\varphi(x_1) + \varphi(x_2)\big) \overset{\psi \text{ ist lin.}}{=} \psi\big(\varphi(x_1)\big) + \psi\big(\varphi(x_2)\big) = \\ &= (\psi \circ \varphi)(x_1) + (\psi \circ \varphi)(x_2),\end{aligned}$$

und

$$(\psi \circ \varphi)(\lambda x_1) = \psi\big(\varphi(\lambda x_1)\big) \overset{\varphi \text{ ist lin.}}{=} \psi\big(\lambda\varphi(x_1)\big) \overset{\psi \text{ ist lin.}}{=} \lambda\psi\big(\varphi(x_1)\big) = \lambda(\psi \circ \varphi)(x_1).$$

Also ist $\psi \circ \varphi$ linear.

b) Wieder müssen wir zeigen, dass $\varphi^{-1} \colon Y \to X$ linear ist. Dazu seien y_1, $y_2 \in Y$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann gelten

$$\varphi\big(\varphi^{-1}(y_1 + y_2)\big) = y_1 + y_2 = \varphi\big(\varphi^{-1}(y_1)\big) + \varphi\big(\varphi^{-1}(y_2)\big) \overset{\varphi \text{ ist lin.}}{=} \varphi\big(\varphi^{-1}(y_1) + \varphi^{-1}(y_2)\big)$$

und

$$\varphi\Big(\varphi^{-1}(\lambda y_1)\Big) = \lambda y_1 = \lambda\varphi\big(\varphi^{-1}(y_1)\big) \overset{\varphi \text{ ist lin.}}{=} \varphi\big(\lambda\varphi^{-1}(y_1)\big).$$

Da φ bijektiv, also auch injektiv, ist, erhalten wir

$$\varphi^{-1}(y_1 + y_2) = \varphi^{-1}(y_1) + \varphi^{-1}(y_2), \quad \varphi^{-1}(\lambda y_1) = \lambda\varphi^{-1}(y_1),$$

und damit ist φ^{-1} linear.

Aufgabe 52
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und φ ein Endomorphismus von V.
a) Sei $v \in V$, so dass für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\varphi^n(v) \neq 0 \quad \text{und} \quad \varphi^{n+1}(v) = 0.$$

Beweisen Sie, dass $v, \varphi(v), \ldots, \varphi^n(v)$ linear unabhängig sind.

b) Sei $\varphi = \varphi \circ \varphi$. Zeigen Sie, dass $V = \ker(\varphi) \oplus \operatorname{im}(\varphi)$ (direkte Summe) gilt.

Lösung:
a) Es ist günstig $\varphi^0 = \mathrm{Id}_V$ zu setzen (also $\varphi^0(w) = w$ für alle $w \in V$). Dann gilt $\varphi^{k+m} = \varphi^k \circ \varphi^m$ für alle k, $m \in \mathbb{N}_0$.
Zunächst beachte man $\varphi^m(v) = 0$ für alle $m \geq n+1$. Denn für $m \geq n+1$ gilt

$$\varphi^m(v) = \varphi^{m-n-1}\big(\varphi^{n+1}(v)\big) = \varphi^{m-n-1}(0) = 0.$$

Es seien nun $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit

$$0 = \lambda_0 v + \lambda_1\varphi(v) + \ldots + \lambda_n\varphi^n(v) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\varphi^k(v).$$

Unsere Aufgabe ist es $\lambda_i = 0$ für $i = 0, \ldots, n$ zu zeigen. Das machen wir mit einer Induktion (nach i). Es sei also $0 \leq i \leq n$ und es gelte $\lambda_k = 0$ für alle $0 \leq k < i$. Wir zeigen $\lambda_i = 0$. Es gilt

$$0 = \varphi^{n-i}(0) = \varphi^{n-i}\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi^k(v)\right) \overset{k<i \Rightarrow \lambda_k=0}{=} \varphi^{n-i}\left(\sum_{k=i}^{n} \lambda_k \varphi^k(v)\right) = \sum_{k=i}^{n} \lambda_k \varphi^{n-i+k}(v).$$

Nun beachte man: ist $k \geq i+1$, so ist $n-i+k \geq n+1$ und damit $\varphi^{n-i+k}(v) = 0$. Daher sind in der letzten Summe alle Summanden die zu einem $k \geq i+1$ gehören Null. Wir erhalten daher

$$0 = \lambda_i \varphi^n(v).$$

Da $\varphi^n(v) \neq 0$ ist, folgt $\lambda_i = 0$.

b) Wir müssen zeigen, dass $V = \ker(\varphi) + \operatorname{im}(\varphi)$ gilt, und dass die Summe $\ker(\varphi) + \operatorname{im}(\varphi)$ direkt ist.
Wir zeigen zunächst, dass die Summe $\ker(\varphi) + \operatorname{im}(\varphi)$ direkt ist. Dazu genügt es $\ker(\varphi) \cap \operatorname{im}(\varphi) = 0$ zu zeigen. Dies folgt aber aus Aufgabe 45, denn $\varphi = \varphi^2$ impliziert $\ker(\varphi) = \ker(\varphi^2)$.
Für den Beweis von $V = \ker(\varphi) + \operatorname{im}(\varphi)$ gibt es (mindestens) zwei Möglichkeiten. Für die erste benutzen wir

$$\dim(\ker(\varphi) + \operatorname{im}(\varphi)) \overset{\text{Summe ist direkt}}{=} \dim(\ker(\varphi)) + \dim(\operatorname{im}(\varphi)) = \dim(V).$$

Da V nach Voraussetzung endliche Dimension hat, folgt $\ker(\varphi) + \operatorname{im}(\varphi) = V$.
Die zweite Möglichkeit kommt ohne die Voraussetzung $\dim(V) < \infty$ aus. Wir müssen nur $V \subset \ker(\varphi) + \operatorname{im}(\varphi)$ zeigen, da die andere Inklusion trivialerweise gilt. Es sei also $v \in V$. Aus

$$\varphi\big(v - \varphi(v)\big) = \varphi(v) - \varphi\big(\varphi(v)\big) = \varphi(v) - \varphi(v) = 0$$

folgt $v - \varphi(v) \in \ker(\varphi)$. Wegen $\varphi(v) \in \operatorname{im}(\varphi)$ erhalten wir

$$v = \big(v - \varphi(v)\big) + \varphi(v) \in \ker(\varphi) + \operatorname{im}(\varphi).$$

Aufgabe 53
a) Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \varphi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix},\ \varphi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}?$$

b) Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\11\end{pmatrix},\ \varphi\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\2\end{pmatrix},\ \varphi\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\2\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\varphi((-1, 8, 3)^T)$.

Lösung:
a) Es ist

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Angenommen es ist nun $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear mit der den angegebenen Eigenschaften. Dann folgt

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \varphi\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{2}\varphi\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + 2\varphi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\\frac{7}{2}\end{pmatrix},$$

Widerspruch. Daher kann es kein solches φ geben.

b) Wir stellen $(-1,8,3)^t$ als Linearkombination der gegebenen Vektoren daher, d.h. wir bestimmen λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix}-1\\8\\3\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Wir lösen dieses lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{cccc}1&1&1&-1\\0&1&1&8\\0&0&1&3\end{array} \xrightarrow[-z_3+z_1]{-z_3+z_2} \begin{array}{cccc}1&1&0&-4\\0&1&0&5\\0&0&1&3\end{array} \xrightarrow{-z_2+z_1} \begin{array}{cccc}1&0&0&-9\\0&1&0&5\\0&0&1&3\end{array}.$$

Bemerkung: Vergessen wir die rechte Seite, so folgt, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Rang 3 hat, d.h. die Spalten dieser Matrix bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$ (das folgt auch schon direkt aus der speziellen Gestalt der Matrix). Daher gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit den angegebenen Eigenschaften.

Wir erhalten nun

$$\begin{pmatrix}-1\\8\\3\end{pmatrix} = -9 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

und damit

$$\varphi\begin{pmatrix}-1\\8\\3\end{pmatrix} = \varphi\left(-9\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = -9\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 5\varphi\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 3\varphi\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= -9\begin{pmatrix}7\\11\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}-8\\2\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-8\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-127\\-83\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 54

Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\varphi\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\y+z\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ von φ bezüglich der Basen

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right).$$

Lösung:

Wir setzen

$$b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Nach Satz 5.17 im Kappel–Skriptum ist für $k = 1, 2, 3$ die k–te Spalte von $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ der Koordinatenvektor von $\varphi(b_k)$ bezüglich der geordneten Basis $\mathcal{B}'$. Damit ergibt sich, was wir tun müssen: wir stellen $\varphi(b_k)$ als Linearkombination der Basisvektoren in $\mathcal{B}'$ dar.

$$
\begin{aligned}
\varphi(b_1) &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\\
\varphi(b_2) &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\\
\varphi(b_3) &= \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Es folgt

$$
M(\varphi;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.
$$

Aufgabe 55

Sei φ eine lineare Abbildung $\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ und

$$
A = M(\varphi;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix}1 & \lambda & 0 & 1\\ -\lambda & 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1\end{pmatrix},
$$

wobei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von $\mathbb{C}^4$ ist. Bestimmen Sie den Rang von φ in Abhängigkeit vom Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$.

Lösung:

Wir wissen aus der Vorlesung, dass der Rang von φ gleich dem Rang von A, also gleich dem Spaltenrang von A ist. Weiters wissen wir, dass sich der Spaltenrang einer Matrix bei elementaren Zeilenumformungen nicht ändert. Wir können also unser Standardschema zur Berechnung des Spaltenrangs von A anwenden:

$$
\begin{array}{cccc}
1 & \lambda & 0 & 1\\
-\lambda & 2 & 1 & 3\\
0 & 0 & \lambda & 0\\
0 & 0 & \lambda & 1
\end{array}
\xrightarrow{\lambda z_1 + z_2}
\begin{array}{cccc}
1 & \lambda & 0 & 1\\
0 & \lambda^2+2 & 1 & 3+\lambda\\
0 & 0 & \lambda & 0\\
0 & 0 & \lambda & 1
\end{array}
\xrightarrow{-z_3 + z_4}
\begin{array}{cccc}
1 & \lambda & 0 & 1\\
0 & \lambda^2+2 & 1 & 3+\lambda\\
0 & 0 & \lambda & 0\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
\quad (*).
$$

Nun müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

1. Fall: $\lambda \neq \pm\sqrt{2}i, 0$. Dann können wir in $(*)$ die zweite Zeile durch λ^2+2 und die dritte durch λ dividieren und erhalten

$$
\begin{array}{cccc}
1 & \lambda & 0 & 1\\
0 & 1 & * & *\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}.
$$

Die Spalten dieser Matrix sind offenbar linear unabhängig, hat also Rang 4. Damit auch A, d.h. φ Rang 4.

2. Fall: $\lambda = \pm\sqrt{2}i$. Dann schaut $(*)$ so aus

$$
\begin{array}{cccc}
1 & \lambda & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 3+\lambda\\
0 & 0 & \lambda & 0\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}.
$$

Wir sehen, dass die ersten beiden, also alle, Spalten linear abhängig sind. Aber wegen $\lambda \neq 0$ sind die erste, dritte und vierte Spalte linear unabhängig. Diese Matrix hat daher Rang 3 und damit auch φ.

3. Fall: $\lambda = 0$. Dann schaut $(*)$ so aus

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} .$$

Wir sehen, dass die zweite und die dritte Spalte, und damit alle Spalten, linear abhängig sind. Aber die erste, die zweite und die vierte Spalte sind linear unabhängig. Wir erhalten $\mathrm{rang}(\varphi) = 3$.